



SCIENCES  
POUR  
L'INGENIEUR

## LABORATOIRE D'AEROTHERMIQUE



1C av. de la recherche scientifique, 45071 Orléans Cedex 2  
Tél.: +33 (0)2 38 25 03 10 Fax : +33 (0)2 38 25 03 17  
e-mail: [aero@cnrs-orleans.fr](mailto:aero@cnrs-orleans.fr)  
<http://www.cnrs-orleans.fr/~webaero>

**R 99-1**

# Equations quasi gazodynamiques avec déséquilibre translationnel ou rotationnel : application à des jets sous-détendus

*Ivan A. CHIROKOV, Irina A. GRAUR,  
Tatiana G. ELIZAROVA, Jean-Claude LENGRAND*

*Rapport de laboratoire*

*Juillet 1999*

Laboratoire d'Aérodynamique : Unité Propre de Recherche du CNRS (UPR9020)  
associée par conventions à l'Université d'Orléans et à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et  
membre de la Fédération de Recherche FR776 *Energétique, Propulsion, Espace, Environnement*



Equations quasi gazodynamiques (QGD)  
avec déséquilibre translationnel ou rotationnel :  
application à des jets sous-détendus

Ivan A. CHIROKOV<sup>1</sup>, Irina A. GRAUR<sup>1</sup>  
Tatiana G. ELIZAROVA<sup>1</sup>, Jean-Claude LENGREND<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut de Modélisation Mathématique,  
Académie des Sciences de Russie, Moscou, Russie  
<sup>2</sup>Laboratoire d'Aérothermique du CNRS, Orléans, France

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equations QGDT pour un déséquilibre entre degrés de liberté translationnels liés aux coordonnées cylindriques</b>	<b>5</b>
2.1	Fonctions de distribution et équations d'état . . . . .	5
2.2	Quelques intégrales et expressions . . . . .	6
2.3	Procédure pour l'établissement des équations de moments . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Equations QGDT pour un déséquilibre entre degrés de liberté translationnels liés aux coordonnées cartésiennes</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Calcul de jets à section rectangulaire en configuration 3D</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Interaction d'un jet avec une paroi parallèle à son axe, en configurations 2D et 3D</b>	<b>14</b>
5.1	Configuration tridimensionnelle . . . . .	14
5.2	Configuration bidimensionnelle . . . . .	15
5.3	Résultats . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Problème de l'interaction de deux jets en configuration bidimensionnelle avec déséquilibre rotationnel</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Jet plan en déséquilibre translationnel</b>	<b>27</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Système d'équations QGD en coordonnées cartésiennes xyz</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Système d'équations QGDR en coordonnées cartésiennes xy</b>	<b>36</b>
<b>C</b>	<b>Système d'équations QGDT en coordonnées cartésiennes xy</b>	<b>37</b>
<b>D</b>	<b>Transformation de certaines expressions à utiliser aux frontières libres</b>	<b>38</b>

# 1 Introduction

Le contrôle de position et d'orientation des satellites et autres véhicules spatiaux est assuré par l'éjection de gaz sous forme de jets [1]. En effet, aux altitudes considérées, la pression ambiante est nulle ou très faible et les forces aérodynamiques externes sont insuffisantes pour être exploitées. Les jets se détendent donc pratiquement dans le vide. Le développement de ces systèmes de contrôle exige des moyens de prédiction pour le comportement des jets et de leur éventuel impact sur des obstacles (effets dynamiques et thermiques, contamination). Ces moyens de prédiction combinent résultats expérimentaux (obtenus à la fois en laboratoire ou au cours de vols réels) et codes de calcul. Ces derniers sont indispensables dans la mesure où tous les paramètres utiles ne peuvent pas être mesurés expérimentalement. En outre, dans les essais en laboratoire, il n'est généralement pas possible d'obtenir un degré de raréfaction du gaz ambiant suffisant pour simuler le vide spatial, ce qui complique la transposition des résultats aux conditions du vol réel.

Une caractéristique essentielle des écoulements de jets est le changement considérable du degré de raréfaction du gaz le long du jet. Dans la région de la tuyère (source du jet), le nombre de Knudsen s'établit à  $Kn \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ , ce qui correspond au régime des milieux continus. Dans la zone intéressante pour des applications pratiques (région d'interaction des jets avec des obstacles ou entre eux), les nombres de Knudsen peuvent atteindre l'unité ou plus, ce qui correspond au régime d'écoulement raréfié, voire moléculaire libre. Un tel changement de la raréfaction complique la simulation numérique du problème, dans la mesure où il impose d'utiliser et de raccorder entre elles différentes approches numériques du problème : les équations continues (équations des moments) au voisinage de la tuyère et des modèles cinétiques (par exemple la Simulation Numérique Directe par méthode de Monte Carlo, DSMC) dans les domaines de basse densité, p.ex.[2].

Dans ce travail, la modélisation du jet qui se détend dans le vide ou dans une atmosphère à basse pression repose sur les équations quasi gazodynamiques (QGD) (p.ex. [3], [4], [5]) et leurs généralisations. Pour des écoulements stationnaires, les équations QGD diffèrent des équations de Navier-Stokes (NS) par des termes dissipatifs supplémentaires d'ordre  $\sim O(Kn^2)$ . C'est pourquoi, comme le montrent les estimations théoriques et les calculs pratiques, les systèmes QGD et NS donnent pratiquement les mêmes résultats pour la simulation d'écoulements de gaz denses, correspondant à des petits nombres de Knudsen. Cependant, pour des nombres de Knudsen modérés, les résultats de ces deux approches commencent à différer. Certains avantages des équations QGD par rapport aux équations NS pour des calculs d'écoulements modérément raréfiés ont été mis en évidence sur des problèmes-types : onde de choc ([6], [7]), écoulement le long d'une plaque plane ([5],[8]) et autour d'un disque ([9], [10]).

Il est connu que l'une des manifestations de la raréfaction d'un gaz est la violation de l'équilibre thermodynamique entre les différents degrés de liberté des molécules [11]. Cet effet s'accroît avec le nombre de Knudsen. Bien que les méthodes de simulation directe (DSMC) prennent en compte ce déséquilibre, il est intéressant de considérer également ce problème au niveau macroscopique.

Les équations QGD peuvent être généralisées pour prendre en compte le déséquilibre des degrés de liberté translationnels du gaz. Il faut remarquer que chaque généralisation de ce type des équations QGD (équations QGDT) est liée au système de coordonnées particulier qui détermine les degrés de liberté et que de ce point de vue, elle n'est pas invariante. Les équations QGDT, prenant en compte le déséquilibre translationnel lié à un système cartésien de coordonnées, ont été décrites dans les travaux [6], [7], [12]. On a montré que la prise en compte de ce déséquilibre améliore sensiblement les profils de densité et de vitesse dans le problème classique de la structure d'une onde de choc, en rapprochant ces profils de ceux obtenus par un calcul DSMC de référence.

La généralisation des équations QGD pour prendre en compte le déséquilibre entre les différents degrés de liberté translationnels des molécules a été réalisée (équations QGDT). De même, leur généralisation pour prendre en compte le déséquilibre entre d'une part énergie translationnelle et d'autre part énergie rotationnelle (QGDR) a été réalisée. Ces travaux sont exposés dans les Refs.[13] et [14].

Dans ce travail, on décrit la construction d'un système QGDT à deux températures, en utilisant le déséquilibre suivant les degrés de liberté associés à des coordonnées cylindriques  $rz$ . Pour cela, on suppose que toutes les fonctions macroscopiques sont indépendantes de l'angle azimutal  $\phi$ . En outre, on suppose que la composante angulaire de la vitesse macroscopique est nulle. La difficulté vient de ce que la composante angulaire de la vitesse thermique des molécules n'est pas supposée nulle.

	A	B-3D	B-2D	C	D
Configuration	3D	3D	2D	2D	2D
Equations	QGD	QGD, NS	QGD	QGDR + viscosité artificielle	QGDT
Maillage	20x20x20	16x12x12	80x60	120x30	91x41
Gaz	Pr=2/3 $\gamma=5/3$ $\omega=1$	Pr=2/3 $\gamma=5/3$ $\omega=0.5$	Pr=2/3 $\gamma=5/3$ $\omega=0.5$	Pr=14/19=0.74 $\gamma=7/5$ $\omega=0.75$	Pr=2/3 $\gamma=5/3$ $\omega=0.5$
Ma	2	2	2	4.22	2
Kn	0.02	0.0333	0.05	0.0333	0.1
$p_\infty/p_e$	0.5	0.5	0.5	0 (vide)	0 (vide)

TAB. 1: Paramètres des cas traités

Plus loin dans ce travail, on démontre la possibilité d'une simulation numérique de la détente d'un jet dans le vide, en utilisant les équations QGD, QGDT et QGDR. Les résultats de calcul sont confrontés à des résultats obtenus par les méthodes cinétiques, les équations NS et à des résultats expérimentaux. On expose des exemples de calculs de jets, en configurations 2D et 3D. Les configurations géométriques sont données sur la figure 1 et les paramètres de l'écoulement et du calcul dans la table 1 :

- (A) écoulement de jet à partir d'une section rectangulaire (cas 3D),
- (B) interaction d'un jet avec une paroi plane parallèle à son axe (cas 2D et 3D),
- (C) interaction entre eux de deux jets parallèles avec prise en compte du déséquilibre translation-rotation (cas 2D),
- (D) écoulement d'un jet plan, avec possibilité de déséquilibre entre trois degrés de liberté translationnels (cas 2D).

Dans tous ces cas, on suppose que le gaz se détend dans le vide ou dans une atmosphère dont la pression est inférieure à la pression de sortie de la tuyère.

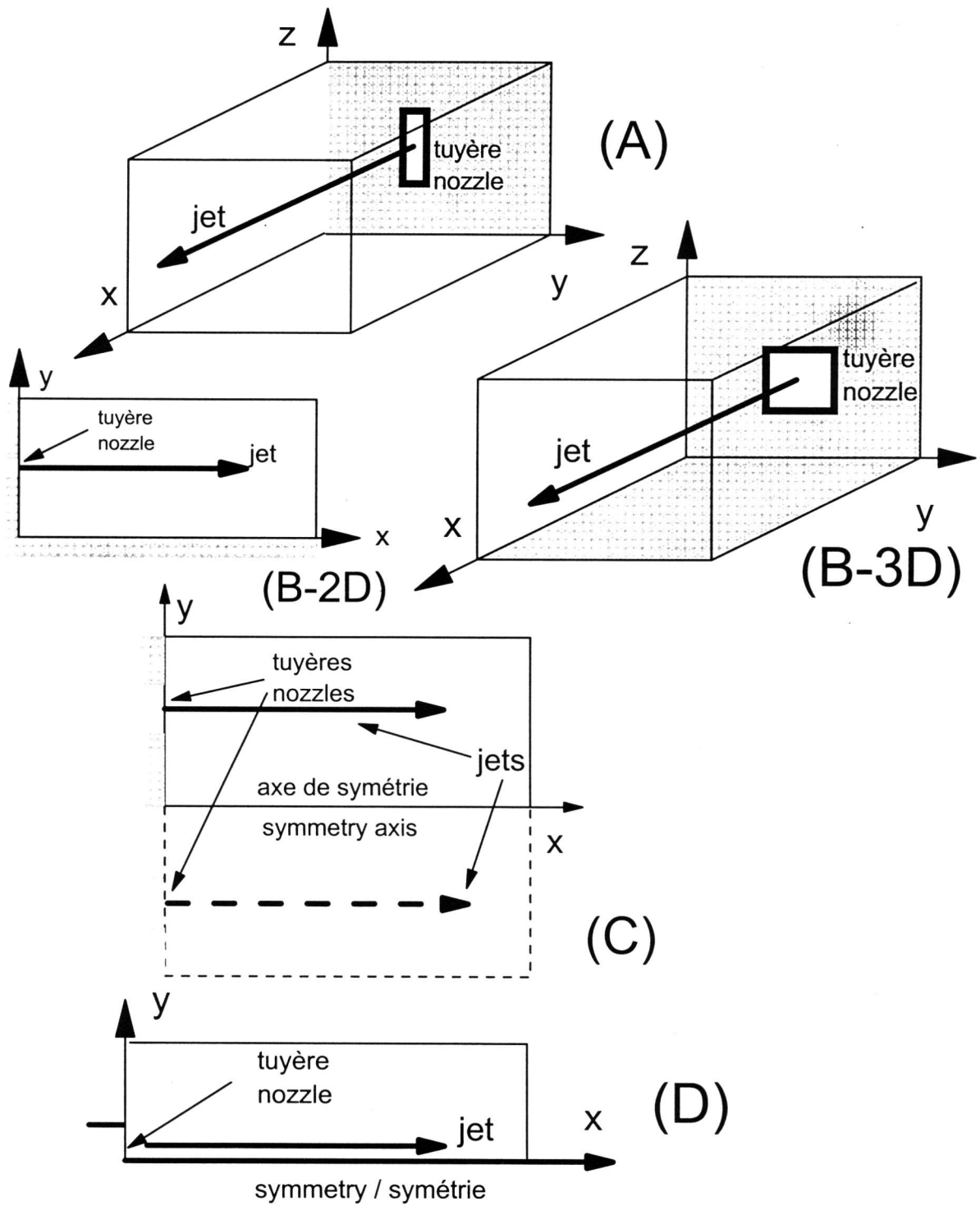


FIG. 1: Schéma des configurations traitées

## 2 Equations QGDT pour un déséquilibre entre degrés de liberté translationnels liés aux coordonnées cylindriques

### 2.1 Fonctions de distribution et équations d'état

Un gaz de molécules **monoatomiques**, considérées comme des points matériels peut être décrit par la fonction de distribution mono-particule  $f(t, \vec{r}, \vec{\xi})$ , fonction du temps  $t$ , des coordonnées  $\vec{r}$  et de la vitesse des molécules  $\vec{\xi}$ . La vitesse des molécules s'écrit  $\vec{\xi} = \vec{c} + \vec{u}$ , où  $\vec{c}$  est la vitesse thermique et  $\vec{u}$  la vitesse macroscopique. On norme la fonction de distribution par la relation

$$d\rho = f d\vec{\xi},$$

où  $\rho$  est la masse volumique du gaz. On considère une fonction de distribution de type Maxwell-Boltzmann, caractérisée localement par deux températures.

$$f_{rz} = \rho \left(2\pi \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}\right)^{-3/2} (T_{\perp}^2 T_z)^{-1/2} \exp\left(-\frac{c_{\perp}^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_{\perp}} - \frac{c_z^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_z}\right).$$

Ici  $\mathcal{R}$  est la constante universelle des gaz parfaits,  $\mathcal{M}$  la masse molaire du gaz considéré,  $N_A$  le nombre d'Avogadro,  $k = \mathcal{R}/N_A$  la constante de Boltzmann,  $c_{\perp}$  la projection de la vitesse  $\vec{c}$  sur un plan perpendiculaire à l'axe  $z$ . D'une façon générale, on désigne par l'indice  $\perp$  la projection de tout vecteur sur ce plan. A priori, il y a 2 températures perpendiculaires, l'une  $T_r$  associée à la vitesse radiale  $c_r$  et l'autre  $T_{\phi}$  associée à la vitesse azimutale  $c_{\phi}$ . On suppose ici qu'elles sont égales toutes deux à  $T_{\perp}$ .  $c_z$  est la projection de la vitesse thermique sur l'axe  $z$  et  $T_z$  la température liée à  $c_z$ .

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k T_r &= \frac{1}{2}m\overline{c_r^2}, & \frac{1}{2}k T_{\phi} &= \frac{1}{2}m\overline{c_{\phi}^2}, & \text{d'où } 2\frac{1}{2}k T_{\perp} &= \frac{1}{2}m\overline{c_{\perp}^2}, & \text{car } \overline{c_{\perp}^2} &= \overline{c_r^2 + c_{\phi}^2} \\ \text{et } \frac{1}{2}k T_z &= \frac{1}{2}m\overline{c_z^2}. \end{aligned}$$

Il est évident que si  $T_{\perp} = T_z = T$ , la fonction de distribution se confond avec la fonction maxwellienne habituelle :

$$f_{rz} = f_0 = \rho \left(2\pi \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\vec{c}^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T}\right).$$

On définit des pressions à partir du tenseur des transferts de quantités de mouvement associés aux vitesses thermiques. En désignant par  $n$  la concentration moléculaire et par  $m$  la masse moléculaire, on a  $p_{ij} = n m \overline{c_i c_j}$  et plus particulièrement

$$p_r = n m \overline{c_r^2}, \quad p_{\phi} = n m \overline{c_{\phi}^2} \quad \text{et donc } p_{\perp} = \frac{1}{2}(p_r + p_{\phi}) = n m \overline{c_{\perp}^2}.$$

De même  $p_z = n m \overline{c_z^2}$ . Il est facile de vérifier que les pressions ainsi définies vérifient les équations d'état

$$p_{\perp} = n k T_{\perp} = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_{\perp}; \quad p_z = n k T_z = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_z.$$

On définit les grandeurs moyennes

$$p_{av} = (2p_{\perp} + p_z)/3; \quad T_{av} = (2T_{\perp} + T_z)/3$$

qui vérifient l'équation d'état  $p_{av} = n k T_{av}$ . On définit aussi les énergies volumiques liées respectivement aux mouvements transversaux et axiaux des molécules sont

$$E_{\perp} = \frac{1}{2}\rho u_r^2 + p_{\perp}; \quad E_z = \frac{1}{2}\rho u_z^2 + \frac{1}{2}p_z,$$

avec, pour l'énergie totale

$$E = E_{\perp} + E_z = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{3}{2}\rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_{av}.$$

## 2.2 Quelques intégrales et expressions

Dans ce paragraphe, on rassemble certaines intégrales et formules de différentiation de tenseurs, utilisées dans le texte principal.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}; & \int_0^\infty x e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2}; & \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}; \\ \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2}; & \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx &= \frac{3}{8}\sqrt{\pi}; & \int_0^\infty x^5 e^{-x^2} dx &= 1; \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi &= \pi; & \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi &= \pi; \\ \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi &= 0; & \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi &= 0; \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi &= 0; & \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi &= 0; \end{aligned}$$

Les formules de différentiation sont écrites en coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$ , en considérant que tous les éléments du tenseurs sont indépendants de l'angle  $\phi$ . En outre, dans certains cas, on suppose une symétrie des tenseurs (voir la remarque ci-dessous).

$$\nabla_i T^i = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r T^1 + \frac{\partial}{\partial z} T^3;$$

$$\nabla_i T^{ik} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r T^{1k} + \frac{\partial}{\partial z} T^{3k} + \delta_2^k \frac{1}{r} (T^{12} + T^{21}) - \delta_1^k r T^{22};$$

Dans la dernière expression,  $T^{ij}$  peut être non symétrique.

$$\nabla_i \tau \nabla_j T^{ij} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r T^{11} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau r \frac{\partial}{\partial z} T^{31} + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r T^{31} + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} T^{33} - \frac{\partial}{\partial r} \tau r T^{22} - \tau T^{22}.$$

Dans la dernière formule, on a supposé que  $T^{ij} = T^{ji}$ .

$$\begin{aligned} \nabla_i \tau \nabla_j T^{ijm} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r T^{11m} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau r \frac{\partial}{\partial z} T^{31m} + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r T^{31m} + \\ &\frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} T^{33m} - \frac{\partial}{\partial r} \tau r T^{22m} - \tau T^{22m} - \\ &\delta_1^m \left[ \frac{\partial}{\partial r} \tau r T^{122} + \frac{\partial}{\partial z} \tau r T^{322} + \tau r \frac{\partial}{\partial r} T^{212} + \tau r \frac{\partial}{\partial z} T^{232} + \tau (3T^{212} + 2T^{122} + T^{221}) \right]. \end{aligned}$$

Dans la dernière formule, on a supposé que  $T^{ijm} = T^{jim}$ , et en outre, que  $m \neq 2$ .

## 2.3 Procédure pour l'établissement des équations de moments

L'évolution de la fonction de distribution est décrite par l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\xi \bar{\nabla}) f = \mathcal{J}, \quad (1)$$

où  $\mathcal{J}$  est l'intégrale de collision. Pour établir les équations de moments décrivant l'écoulement d'un gaz visqueux, on utilise habituellement pour la fonction  $f$  une approximation en développement sur un petit paramètre, au voisinage de l'équilibre, puis l'équation cinétique ainsi obtenue est multipliée par des invariants collisionnels et intégrée [11].

Pour établir les équations de moments avec déséquilibre de températures, on remplace la fonction de distribution  $f$  par son approximation  $f^{QGDRZ}$ , qui est un développement sur un petit paramètre (*gradient expansion*) du type

$$f^{QGDRZ} = f_{rz} - \tau(\vec{\xi}\vec{\nabla})f_{rz}.$$

Ici  $\tau$  est le temps de relaxation maxwellien

$$\tau = \frac{\mu}{p_{av}},$$

où le coefficient de viscosité  $\mu$  est supposé varier avec la température moyenne  $\mu \propto T_{av}^\omega$ . L'exposant  $\omega$  dépend du potentiel d'interaction moléculaire.

Le changement formel

$$f \rightarrow f^{QGDRZ}$$

dans le terme convectif de l'équation de Boltzmann (1) conduit à l'équation approchée

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi}\vec{\nabla})f_{rz} - (\vec{\xi}\vec{\nabla})\tau(\vec{\xi}\vec{\nabla})f_{rz} = \mathcal{J}. \quad (2)$$

Les équations macroscopiques s'obtiennent en prenant les moments de l'équation (2) par intégration sur l'espace des vitesses. La procédure est identique à celle exposée dans [6].

On intègre en coordonnées cylindriques dans l'espace des vitesses

$$\int \dots d\vec{\xi} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \dots c_\perp dc_\perp d\varphi dc_z.$$

Le repère contravariant du système de coordonnées spatiales cylindriques est désigné par  $R^i$ , le système de coordonnées cylindriques dans l'espace des vitesses est désigné par  $L^i$ .

On remarque que dans ce chapitre, on ne cherche pas à obtenir une forme invariante des équations sur la base de la fonction de distribution introduite. En d'autres termes, tous les indices de tenseurs sont supposés relatifs au système cylindrique de coordonnées spatiales  $(r, \phi, z)$ . Par exemple  $c^1 = \vec{c} \cdot R^1 = c_r$ ,  $c^3 = \vec{c} \cdot R^3 = c_z$  etc. On suppose que  $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{R}^2 = 0$ , mais, d'une façon générale,  $c^2 = \vec{c} \cdot \vec{R}^2 \neq 0$ .

Il est facile de voir que

$$\int f d\vec{\xi} = \int f_{rz} d\vec{\xi} = \rho; \quad \int c^i f d\vec{\xi} = \int c^i f_{rz} d\vec{\xi} = 0 \quad (3)$$

Pour les besoins des calculs futurs, on introduit le développement suivant de la dérivée scalaire

$$\begin{aligned} c^i &= \vec{c} \cdot R^i = (\vec{c} \cdot L_k)(R^i \cdot L^k) = \\ &(\vec{c} \cdot L_1)(R^i \cdot L^1) + (\vec{c} \cdot L_2)(R^i \cdot L^2) + (\vec{c} \cdot L_3)(R^i \cdot L^3) = c_\perp(R^i \cdot L^1) + c_z(R^i \cdot L^3). \end{aligned} \quad (4)$$

On écrit chaque composante

$$c^1 = c_\perp \cos \varphi; \quad c^2 = c_\perp \frac{1}{r} \sin \varphi; \quad c^3 = c_z.$$

Pour obtenir les équations en  $\rho$ ,  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $E_\perp$ ,  $E_r$ , on intègre l'équation (2), en la multipliant par 1,  $\xi_\perp$ ,  $\xi_z$ ,  $\xi_\perp^2/2$ ,  $\xi_z^2/2$ . Pour cela, on utilise le développement (4) et l'expression du paragraphe (2.2).

Pour calculer les termes d'échange, moments de l'intégrale de collision

$$S_\perp = \int \mathcal{J} \frac{1}{2} \xi_\perp^2 d\vec{\xi}, \quad S_z = \int \mathcal{J} \frac{1}{2} \xi_z^2 d\vec{\xi}.$$

on utilise une approximation en relaxation de l'intégrale de collision

$$\mathcal{J} = (f_0 - f)/\tau_c,$$

où  $f_0$  est la fonction de distribution correspondant à l'équilibre à la température  $T_{av}$  et  $\tau_c$  est le temps moyen entre collisions.



On obtient

$$S_{\perp} = \int \frac{f_0 - f}{\tau_c} \frac{\xi_{\perp}^2}{2} d\vec{\xi} = \frac{1}{2\tau_c} \int (f_0 - f)(c_{\perp}^2 + u_r^2 + 2c_{\perp} u_r \cos \varphi) d\vec{\xi} =$$

$$\frac{1}{2\tau_c} \int (f_0 - f) c_{\perp}^2 d\vec{\xi} = \frac{1}{2\tau_c} (2 \frac{2p_{\perp} + p_z}{3} - 2p_{\perp}) = \frac{1}{3\tau_c} (p_z - p_{\perp}).$$

De même

$$S_z = \int \frac{f_0 - f}{\tau_c} \frac{\xi_z^2}{2} d\vec{\xi} = \frac{1}{2\tau_c} \int (f_0 - f)(c_z^2 + u_z^2) d\vec{\xi} =$$

$$\frac{1}{2\tau_c} \int (f_0 - f) c_z^2 d\vec{\xi} = \frac{1}{2\tau_c} (2 \frac{2p_{\perp} + p_z}{3} - p_z) = \frac{1}{3\tau_c} (p_{\perp} - p_z).$$

On arrive finalement au système d'équations suivant

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r^2 + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z^2$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial r} p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} p_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_r u_z + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r u_z.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r^2 + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_r u_z + \frac{\partial}{\partial r} p_{\perp} =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r^3 + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_r u_z^2 + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial r} u_r p_{\perp} - 2 \frac{\tau}{r^2} u_r p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r u_r p_{\perp}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} u_r p_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_r^2 u_z + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r^2 u_z + \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial z} u_z p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} u_z p_{\perp}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r u_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z^2 + \frac{\partial}{\partial z} p_z =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r^2 u_z + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial r} u_z p_{\perp} + 3 \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} u_z p_z$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z^2 u_r + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_z^2 u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial z} p_z u_r + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r p_z u_r.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\perp} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_r (E_{\perp} + p_{\perp}) + \frac{\partial}{\partial z} u_z E_{\perp} =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r u_r^2 (E_{\perp} + 2p_{\perp}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} u_z^2 E_{\perp} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial r} p_{\perp} \frac{u_r^2}{2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} p_z \frac{u_r^2}{2} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{p_{\perp}}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p_{\perp}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{p_{\perp}}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p_z + Pr^{-1} (2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau p_{\perp} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p_{\perp}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \tau p_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_{\perp}}{\rho})$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial z} u_r u_z (E_{\perp} + p_{\perp}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r u_r u_z (E_{\perp} + p_{\perp}) + S_{\perp}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_r E_z + \frac{\partial}{\partial z} u_z (E_z + p_z) =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau \frac{\partial}{\partial r} r u_r^2 E_z + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} u_z^2 (E_z + 2p_z) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} p_z \frac{u_z^2}{2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial r} p_{\perp} \frac{u_z^2}{2}$$

$$+ \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{p_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p_{\perp} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{p_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p_z + Pr^{-1} (\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau p_{\perp} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p_z}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial z} \tau p_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_z}{\rho})$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau \frac{\partial}{\partial z} u_r u_z (E_z + p_z) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial r} r u_r u_z (E_z + p_z) + S_z.$$

$$p_{\perp} = \frac{1}{2} \int c_{\perp}^2 f d\vec{\xi} = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_{\perp}, \quad p_z = \int c_z^2 f d\vec{\xi} = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_z.$$

$$E_{\perp} = \int \frac{1}{2} \xi_{\perp}^2 f d\vec{\xi} = \frac{1}{2} \rho u_r^2 + p_{\perp}, \quad E_z = \int \frac{1}{2} \xi_z^2 f d\vec{\xi} = \frac{1}{2} \rho u_z^2 + \frac{1}{2} p_z.$$

$$S_{\perp} = -S_z = \frac{1}{3\tau} (p_z - p_{\perp}).$$

Considérons les équations obtenues dans le cas où  $T_{\perp} = T_z = T$ , correspondant à  $p_{\perp} = p_z = p$ . Il est évident que les équations pour  $\rho$ ,  $u_r$  et  $u_z$  se transforment en équations QGD correspondantes, écrites en géométrie rz. Si maintenant on additionne les équations pour  $E_{\perp}$  et  $E_z$ , en tenant compte de  $E_{\perp} + E_z = E$  ( $E$  étant l'énergie totale) et de

$$S_{\perp} + S_z = \int \mathcal{J} \frac{1}{2} \xi^2 d\vec{\xi} = 0,$$

on obtient l'équation QGD pour  $E$  en géométrie rz pour  $\gamma = 5/3$ . Ainsi, à l'équilibre, les équations QGDT se réduisent aux équations QGD pour un gaz monoatomique.

### 3 Equations QGDT pour un déséquilibre entre degrés de liberté translationnels liés aux coordonnées cartésiennes

Dans ce paragraphe, on examine rapidement la généralisation des équations QGD au cas d'écoulements caractérisés localement par des températures différentes liées à un système cartésien :  $T_x \neq T_y \neq T_z$ . L'obtention de ce système est tout à fait analogue à celle décrite précédemment pour un déséquilibre en géométrie rz, de même qu'elle est analogue à celle du système QGDR qui prend en compte le déséquilibre rotationnel [7]. La différence réside dans une autre forme de la fonction de distribution de base et dans l'utilisation d'un autre système de coordonnées.

On prend une fonction de distribution de la forme

$$f_e = \frac{\rho}{(2\pi \mathcal{R}/\mathcal{M})^{3/2} (T_x T_y T_z)^{1/2}} \exp\left(\frac{-((\vec{\xi} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_x)^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_x}\right) \times \exp\left(\frac{-((\vec{\xi} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_y)^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_y}\right) \exp\left(\frac{-((\vec{\xi} - \vec{u}) \cdot \vec{e}_z)^2}{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_z}\right).$$

Ici,  $e_x, e_y, e_z$  constituent une base cartésienne fixe dont l'orientation détermine la fonction de distribution. En raisonnant comme au paragraphe 2.3, on écrit l'équation approchée dans ce cas :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\xi} \nabla) f_e - (\vec{\xi} \nabla) \tau (\vec{\xi} \nabla) f_e = \mathcal{J}. \quad (5)$$

En multipliant cette équation successivement par 1,  $\xi^i$ ,  $\xi_x^2/2$ ,  $\xi_y^2/2$ ,  $\xi_z^2/2$  et en intégrant sur l'espace des vitesses  $\vec{\xi}$ , on peut obtenir un système d'équations macroscopiques dans un système de coordonnées curvilignes quelconques.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i \rho u^i = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j + P^{ij}).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i (\rho u^i u^k + P^{ik}) = \nabla_i \tau \nabla_j (\rho u^i u^j u^k + u^i P^{jk} + u^j P^{ik} + u^k P^{ij}).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_\alpha + \nabla_i (E_\alpha u^i + p_\alpha u_\alpha R_\alpha^i) &= \nabla_i \tau \nabla_j (E_\alpha u^i u^j + u_\alpha p_\alpha (u^j R_\alpha^i + u^i R_\alpha^j) + \frac{1}{2} (u_\alpha)^2 P^{ij}) + \\ P r^{-1} \nabla_i \tau (\frac{1}{2} P^{ij} + R_\alpha^i R_\alpha^j p_\alpha) \nabla_j \frac{p_\alpha}{\rho} &+ \nabla_i \tau \frac{p_\alpha}{\rho} \nabla_j (\frac{1}{2} P^{ij} + R_\alpha^i R_\alpha^j p_\alpha) + S_\alpha. \end{aligned}$$

Ici  $\alpha$  prend les valeurs x, y, z ;  $E_x, E_y, E_z, p_x, p_y, p_z$ , sont des scalaires.

$$\begin{aligned} u_x &= (\vec{u} \cdot \vec{e}_x); & u_y &= (\vec{u} \cdot \vec{e}_y); & u_z &= (\vec{u} \cdot \vec{e}_z); \\ R_x^i &= (\vec{R}_i \cdot \vec{e}_x) = e_x^i; & R_y^i &= (\vec{R}_i \cdot \vec{e}_y) = e_y^i; & R_z^i &= (\vec{R}_i \cdot \vec{e}_z) = e_z^i; \end{aligned}$$

$R^i$  est le repère du système de coordonnées curvilignes arbitraire.

$$P^{ij} = p_x R_1^i R_1^j + p_y R_2^i R_2^j + p_z R_3^i R_3^j = P^{ji}$$

Si  $p_x = p_y = p_z = p$ , alors  $P^{ij} = p(\vec{R}^i \cdot \vec{R}^j) = p g^{ij}$ .

L'énergie totale est  $E = E_x + E_y + E_z$ .

Les composantes de l'énergie totale s'écrivent :

$$E_x = \frac{1}{2} \rho u_x^2 + \frac{1}{2} p_x, \quad E_y = \frac{1}{2} \rho u_y^2 + \frac{1}{2} p_y, \quad E_z = \frac{1}{2} \rho u_z^2 + \frac{1}{2} p_z.$$

Les équations d'état sont :

$$p_x = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_x, \quad p_y = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_y, \quad p_z = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_z.$$

Pour calculer les termes d'échange, on prend, de même, l'approximation en relaxation de l'intégrale de collision et on trouve :

$$S_x = \frac{1}{6\tau_c}(p_y + p_z - 2p_x), \quad S_y = \frac{1}{6\tau_c}(p_x + p_z - 2p_y), \quad S_z = \frac{1}{6\tau_c}(p_x + p_y - 2p_z). \quad (6)$$

Les expressions pour les pression et température moyennes sont

$$p_{av} = (p_x + p_y + p_z)/3; \quad T_{av} = (T_x + T_y + T_z)/3. \quad (7)$$

Tout comme le système QGDT en coordonnées  $rz$  étudié précédemment, le présent système, avec dés-équilibre translationnel suivant les coordonnées cartésiennes se réduit au système d'équations QGD pour un gaz monoatomique dans le cas de l'équilibre ( $T_x = T_y = T_z$ ).

## 4 Calcul de jets à section rectangulaire en configuration 3D

On a effectué des calculs de jets sur la base des équations QGD, en coordonnées cartésiennes (Annexe A). Le domaine de calcul est un cube  $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L$  (Fig.1, configuration A). La section de sortie de la tuyère est disposée dans le plan  $yz$ , en  $x = 0$ . Elle a une forme rectangulaire. Le reste du plan  $x = 0$  est constitué par une paroi solide.

L'écoulement est supposé parallèle et uniforme dans la section de sortie de la tuyère et on utilise des variables adimensionnées en introduisant des paramètres d'échelle, à savoir les paramètres de l'écoulement dans la section de sortie de la tuyère : la masse volumique  $\rho_{ref}$ , la température  $T_{ref}$ , la vitesse du son  $a_{ref} = \sqrt{\gamma(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_{ref}}$ , le libre parcours moyen  $\lambda_{ref}$ . Les pressions sont alors réduites par  $p_{ref} = \gamma\rho_{ref}(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_{ref}$ .

Le temps de relaxation de Maxwell peut s'exprimer en considérant des molécules de type VHS (*Variable Hard Sphere* caractérisées par  $\mu \propto T^\omega$ ). Le modèle VHS inclut comme cas particuliers les molécules *sphères rigides* ( $\omega = 1/2$ ) et les molécules de Maxwell ( $\omega = 1$ ). On trouve

$$\tau = \gamma^{\omega-0.5} \frac{15\sqrt{2\pi}}{2(7-2\omega)(5-2\omega)} \left(\frac{p}{\rho}\right)^\omega \frac{1}{p}. \quad (8)$$

La méthode aux différences finies utilisée dans les calculs tridimensionnels est analogue à celle exposée dans [8] pour les calculs bidimensionnels. On utilise un maillage  $20 \times 20 \times 20$ , et des pas identiques en  $x, y, z$ . Le système d'équations est approximé par des différences centrées au deuxième ordre de précision en espace et un schéma décentré au premier ordre de précision en temps. Le calcul de l'écoulement stationnaire s'obtient par une méthode d'établissement, ce qui rend inutile une meilleure approximation en temps.

Le pas du maillage est  $h = 10$ , la dimension du domaine de calcul est  $190 \times 190 \times 190$ , la position de la tuyère est définie par les inégalités  $75 \leq y \leq 125, 35 \leq z \leq 165$ , de sorte que la largeur de la tuyère est 50, et sa longueur 130. Le nombre de Knudsen, défini comme le rapport du libre parcours moyen à la largeur de la tuyère est égal à  $Kn = 0.02$ .

Les conditions initiales sont prises comme suit : dans le prolongement de la tuyère ( $0 \leq x \leq 190, 75 \leq y \leq 125, 35 \leq z \leq 165$ )

$$\rho = \rho_e = 1, \quad p = p_e = 1/\gamma, \quad T = T_e = 1, \quad u_x = Ma, \quad u_y = u_z = 0,$$

et dans le reste du domaine

$$\rho = \rho_{inf} = 1/2, \quad p = p_{inf} = 1/(2\gamma) = p_e/2, \quad T = T_{inf} = 1, \quad u_x = u_y = u_z = 0.$$

Les conditions aux limites pour les différences sont déterminées sur la base d'une approximation au premier ordre par les expressions suivantes :

Dans la section de sortie de la tuyère ( $x = 0, 75 \leq y \leq 125, 35 \leq z \leq 165$ )

$$\rho = \rho_e, \quad p = p_e, \quad u_x = Ma, \quad u_y = u_z = 0;$$

sur le reste du domaine  $x = 0$

$$\partial p / \partial x = 0, \quad \rho = \gamma p / T_{inf}, \quad u_x = u_y = u_z = 0;$$

sur les frontières latérales, supérieure et inférieure

$$\partial u_x / \partial n = \partial u_y / \partial n = \partial u_z / \partial n = 0, \quad \rho = \rho_{inf}, \quad p = p_{inf} = p_e/2,$$

(ici, les dérivées  $\partial/\partial n$  représentent les dérivées perpendiculaires à la frontière) ;  
sur la frontière aval : "soft conditions"

$$\partial \rho / \partial x = \partial p / \partial x = \partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = \partial u_z / \partial x = 0.$$

Le pas de temps est choisi par la formule

$$h_t = \alpha h / u_{max}, \quad (9)$$

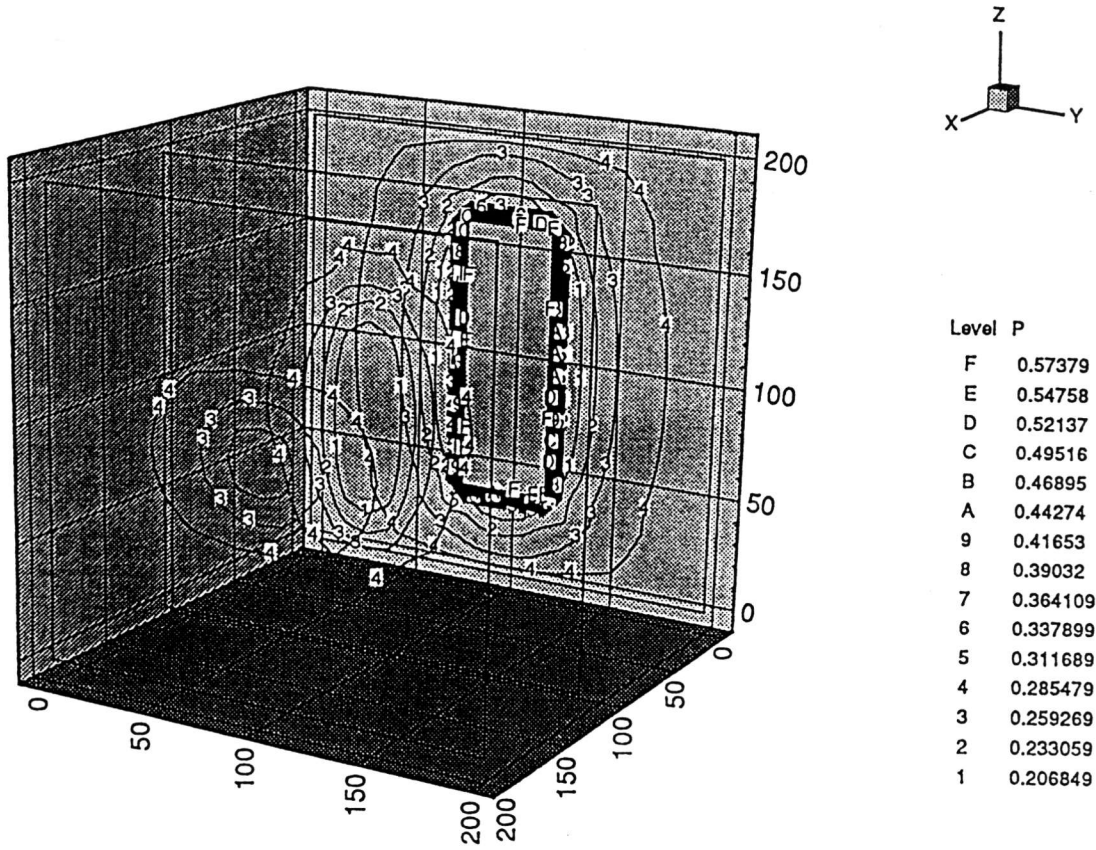


FIG. 2: Isobares dans un jet issu d'une fente rectangulaire (configuration A)

où  $h$  est le pas en espace,  $u_{max} = \max(\sqrt{T} + \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2})$ . Le calcul s'arrête lorsque le critère de convergence

$$\max(\hat{\rho} - \rho)/h_t < \varepsilon, \quad (10)$$

où  $\hat{\rho}$  est la valeur de la densité dans la couche temporelle supérieure et  $\rho$  dans la couche inférieure. On prend  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Le calcul a été effectué pour un gaz monoatomique : nombre de Prandtl  $Pr = 2/3$ , rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma = 5/3$ . On a pris  $\omega = 1$  (caractéristique de molécules de Maxwell) et  $Ma = 2$ . Les rapports de température et de pression en sortie de jet étaient donc

$$\frac{T_{inf}}{T_e} = 1, \quad \frac{p_{inf}}{p_e} = 0.5.$$

Le nombre de pas en temps a été de l'ordre de  $10^4$ . Sur la figure 2 on montre les courbes isobares. On voit que les sections  $yz$  du jet montrent une "inversion" progressive : la plus grande largeur, qui était suivant  $z$  à la sortie de la tuyère devient suivant  $y$  lorsque l'on s'en éloigne. Un tel comportement a déjà été constaté, par exemple par [15], [16] et [17].

## 5 Interaction d'un jet avec une paroi parallèle à son axe, en configurations 2D et 3D

Le calcul de l'interaction d'un jet avec une paroi a été effectué sur la base des équations QGD en configurations bi- et tri-dimensionnelles (Annexe A) et sur la base des équations de Navier-Stokes (NS) en configuration 3D, en coordonnées cartésiennes. La méthode de calcul est tout à fait analogue à celle exposée au paragraphe précédent.

### 5.1 Configuration tridimensionnelle

Le domaine de calcul (Fig.1, configuration B-3D) est un parallélépipède :  $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$ . La tuyère est placée dans le plan  $yz$ ,  $x = 0$  et présente une section carrée. En dehors de la section de sortie de la tuyère, le plan  $x = 0$  est constitué d'une paroi solide dans les limites du domaine de calcul. Une autre paroi solide occupe le plan  $z = 0$ . Les grandeurs adimensionnelles sont introduites comme au paragraphe précédent (les grandeurs de référence étant prises dans la section de sortie de la tuyère). La viscosité dans les équations NS est liée au temps maxwellien de relaxation des équations QGD par  $\mu = \tau p$ , où  $\tau$  se calcule par la formule (8).

On utilise un maillage spatial uniforme  $16 \times 12 \times 12$  (respectivement en  $x, y, z$ ) avec un pas  $h = 5$ , de sorte que le domaine de calcul a pour dimensions  $75 \times 55 \times 55$ . La position de la tuyère est déterminée par les inégalités  $15 \leq y \leq 45, 15 \leq z \leq 45$ . Le nombre de Knudsen se définit comme le rapport du libre parcours moyen à la largeur de la tuyère :  $Kn \approx 0.033$ .

Les conditions initiales sont

- dans le prolongement de la tuyère ( $0 \leq x \leq 75, 15 \leq y \leq 45, 15 \leq z \leq 45$ ) :

$$\rho = \rho_e = 1, \quad p = p_e = 1/\gamma, \quad T = T_e = 1, \quad u_x = Ma, \quad u_y = u_z = 0,$$

- ailleurs

$$\rho = \rho_{inf} = 1/2, \quad p = p_{inf} = 1/(2\gamma), \quad T = T_{inf} = 1, \quad u_x = u_y = u_z = 0.$$

Les conditions aux limites sont

- dans la section de sortie ( $x = 0, 15 \leq y \leq 45, 15 \leq z \leq 45$ )

$$\rho = \rho_e, \quad p = p_e, \quad u_x = Ma, \quad u_y = u_z = 0;$$

l'écoulement est parallèle et uniforme ;

- sur les parois solides (le reste du plan  $x = 0$  et la frontière inférieure  $z = 0$ )

$$\partial p / \partial n = 0, \quad \rho = \gamma p / T_{inf}, \quad u_x = u_y = u_z = 0;$$

- sur les frontières latérales et supérieure

$$\partial u_x / \partial n = \partial u_y / \partial n = \partial u_z / \partial n = 0, \quad \rho = \rho_{inf}, \quad p = p_{inf}$$

( $\partial / \partial n$  désigne la dérivée normale à la frontière) ;

- sur la frontière opposée au plan de la tuyère "soft conditions"

$$\partial \rho / \partial x = \partial p / \partial x = \partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = \partial u_z / \partial x = 0.$$

Le pas de temps et le critère de convergence sont donnés encore respectivement par les équations (9) et (10).

Le calcul a été effectué pour les paramètres suivants : Nombre de Mach en sortie de tuyère  $Ma = 2$ , gaz monoatomique ( $Pr = 2/3, \gamma = 5/3$ ), On a pris  $\omega = 1/2$  (caractéristique de molécules sphères rigides,  $\mu \propto T^{1/2}$ ). Les rapports de température et de pression en sortie de jet étaient donc

$$\frac{T_{inf}}{T_e} = 1, \quad \frac{p_{inf}}{p_e} = 0.5.$$

Le nombre de pas de temps jusqu'à la convergence était d'environ 7500 pour le système QGD et 8000 pour le système NS.

## 5.2 Configuration bidimensionnelle

La configuration est la variante bidimensionnelle  $xy$  de celle présentée au paragraphe précédent (Fig.1, configuration B-2D). La tuyère est disposée sur l'axe  $y$ ,  $x = 0$ . Une paroi solide occupe l'axe  $y = 0$ . Le problème est rendu adimensionnel comme précédemment. On utilise un maillage spatial uniforme  $80 \times 60$  (respectivement en  $x, y$ ) avec un pas  $h = 1$ , de sorte que les dimensions du domaine de calcul sont  $70 \times 59$ . La position de la tuyère est déterminée par les inégalités  $19.5 \leq y \leq 40.5$ . Le nombre de Knudsen se définit comme le rapport du libre parcours moyen à la largeur de la tuyère  $Kn = 0.05$ .

Les conditions initiales sont

- dans le prolongement de la tuyère ( $0 \leq x \leq 79, 19.5 \leq y \leq 40.5$ ) :

$$\rho = \rho_e = 1, \quad p = p_e = 1/\gamma, \quad T = T_e = 1, \quad u_x = Ma, \quad u_y = 0,$$

- ailleurs

$$\rho = \rho_{inf} = 1/2, \quad p = p_{inf} = 1/(2\gamma), \quad T = T_{inf} = 1, \quad u_x = u_y = 0.$$

Les conditions aux limites sont

- dans la section de sortie ( $x = 0, 19.5 \leq y \leq 40.5$ )

$$\rho = \rho_e, \quad p = p_e, \quad u_x = Ma, \quad u_y = 0;$$

l'écoulement est parallèle et uniforme ;

- sur les parois solides (le reste de l'axe  $y$  et la frontière inférieure  $y = 0$ )

$$\partial p / \partial n = 0, \quad \rho = \gamma p / T_{inf}, \quad u_x = u_y = u_z = 0;$$

- sur la frontière supérieure

$$\partial u_x / \partial n = \partial u_y / \partial n = 0, \quad \rho = \rho_{inf}, \quad p = p_{inf}$$

( $\partial / \partial n$  désigne la dérivée normale à la frontière) ;

- sur la frontière opposée au plan de la tuyère "soft conditions"

$$\partial \rho / \partial x = \partial p / \partial x = \partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = 0.$$

Le pas de temps et le critère de convergence sont donnés encore respectivement par les équations (9) et (10), en posant  $u_z = 0$ .

Le calcul a été effectué pour les paramètres suivants : Nombre de Mach en sortie de tuyère  $Ma = 2$ , gaz monoatomique ( $Pr = 2/3, \gamma = 5/3$ ), On a pris encore  $\omega = 1/2$  (caractéristique de molécules sphères rigides,  $\mu \propto T^{1/2}$ ). Les rapports de température et de pression en sortie de jet étaient donc

$$\frac{T_{inf}}{T_e} = 1, \quad \frac{p_{inf}}{p_e} = 0.5.$$

Le nombre de pas de temps jusqu'à la convergence était d'environ 40000.

## 5.3 Résultats

Sur les figures 3 et 4 on a représenté les répartitions de  $p$  (pression adimensionnée par  $p_{ref} = \gamma \rho_{ref} (\mathcal{R}/\mathcal{M}) T_{ref}$ ), de  $q$  (densité de flux thermique adimensionnée par  $p_{ref} a_{ref}$ ) et de  $\sigma$  (contrainte tangentielle de frottement adimensionnée par  $p_{ref}$ ) sur la paroi inférieure. On rappelle que les grandeurs de référence  $\rho_{ref}, T_{ref}$ , et  $a_{ref}$  sont respectivement la masse volumique, température et vitesse du son dans la section de sortie de la tuyère. Les grandeurs de paroi sont calculées à partir des grandeurs adimensionnées par

$$q = \frac{1}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \tau \frac{\partial p}{\partial n}, \quad \sigma = \tau \frac{\partial p}{\partial n} p u \quad (11)$$

Il est facile de montrer [8], que sous les hypothèses d'adhérence à la paroi ( $\vec{u} = 0$ ) et de gradient normal de pression nul  $\partial p / \partial n = 0$ , les expressions de  $q$  et de  $\sigma$  sont correctes à la fois pour les systèmes QGD et NS et correspondent aux quantités dimensionnées habituelles, respectivement ( $\kappa \partial T / \partial n$ ) et ( $\mu \partial u / \partial n$ ).



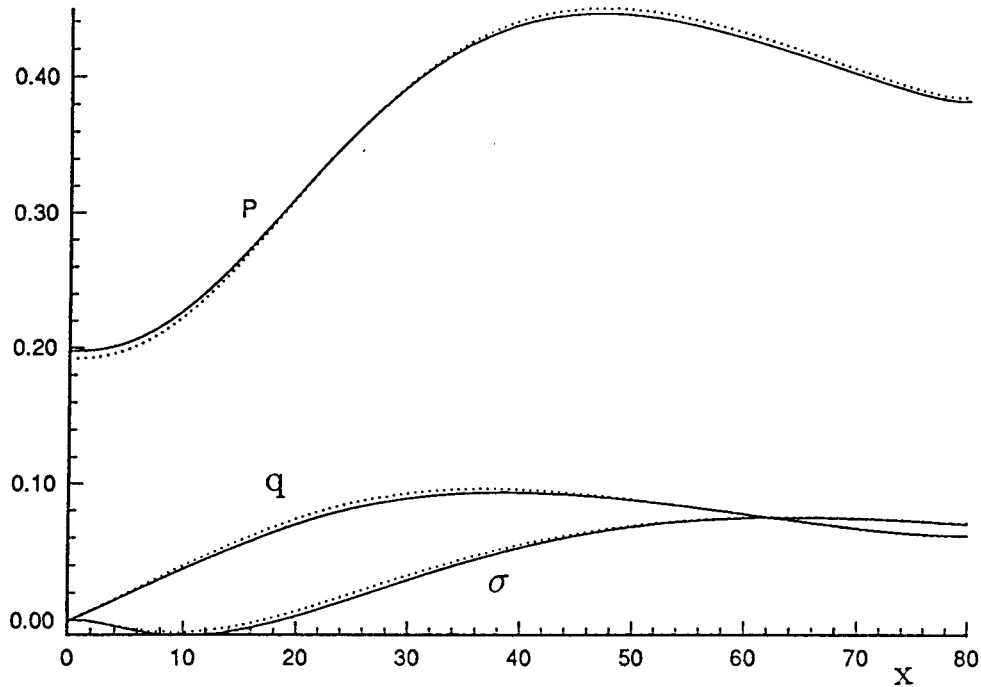


FIG. 3: Pression, flux thermique et contrainte de frottement adimensionnels en configuration B-2D (influence du pas d'espace)

Sur la figure 3, on compare les résultats obtenus sur la base des équations QGD pour le même problème 2D avec des pas différents en espace. La ligne pleine correspond à des pas en  $x$  et en  $y$  deux fois plus petits que les valeurs nominales indiquées plus haut. On voit que la convergence sur le pas du maillage est obtenue.

Sur la figure 4, on compare les résultats obtenus sur la base des équations QGD (lignes pleines) et NS (lignes pointillées) sur le même problème 3D en utilisant la même méthode de calcul. Les résultats correspondent à l'axe de symétrie ( $z = 0, y = 27.5$ ).

Sur la figure 5 on a tracé les isobares dans le champ d'écoulement en configuration 2D.

Le problème de départ (interaction d'un jet avec une paroi parallèle à son axe) a été étudié expérimentalement dans [18], mais pour d'autres valeurs des nombres de Mach ( $Ma = 5.82$ ) et de Knudsen ( $Kn = 4.13 \times 10^{-4}$ ). Néanmoins, on peut observer la correspondance qualitative des profils de pression et de flux thermique avec ceux de [18]. Les profils de flux thermique sur les mêmes figures sont aussi en accord qualitatif avec ceux de [19] obtenus par DSMC pour des jets soniques ( $Ma = 1, Kn = 2 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-3}$ ).

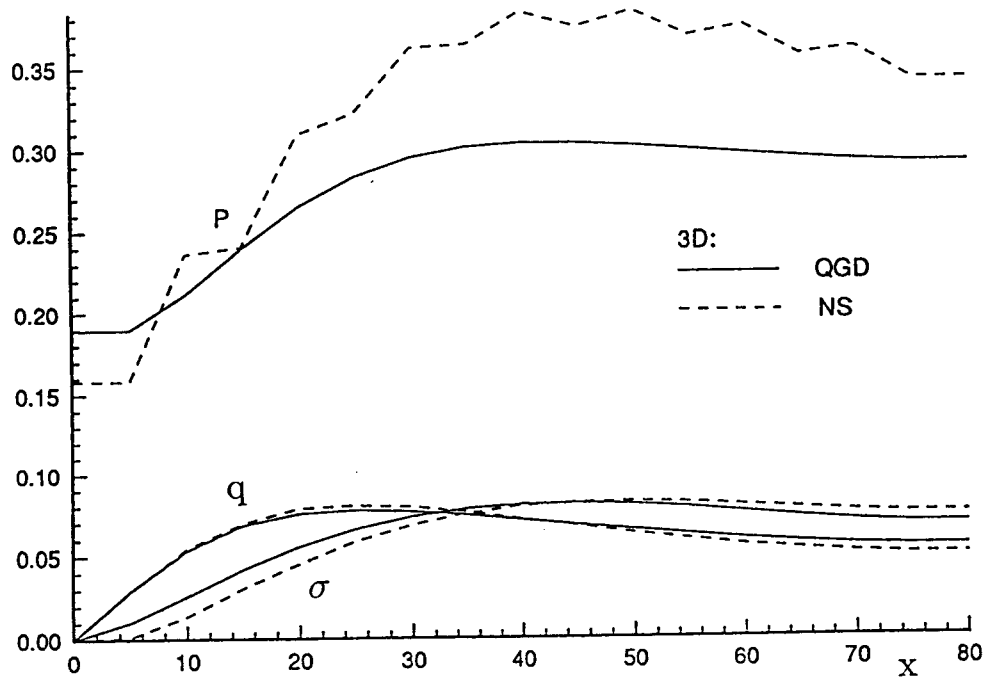


FIG. 4: Pression, flux thermique et contrainte de frottement adimensionnels en configuration B-3D (comparaison QGD-NS)

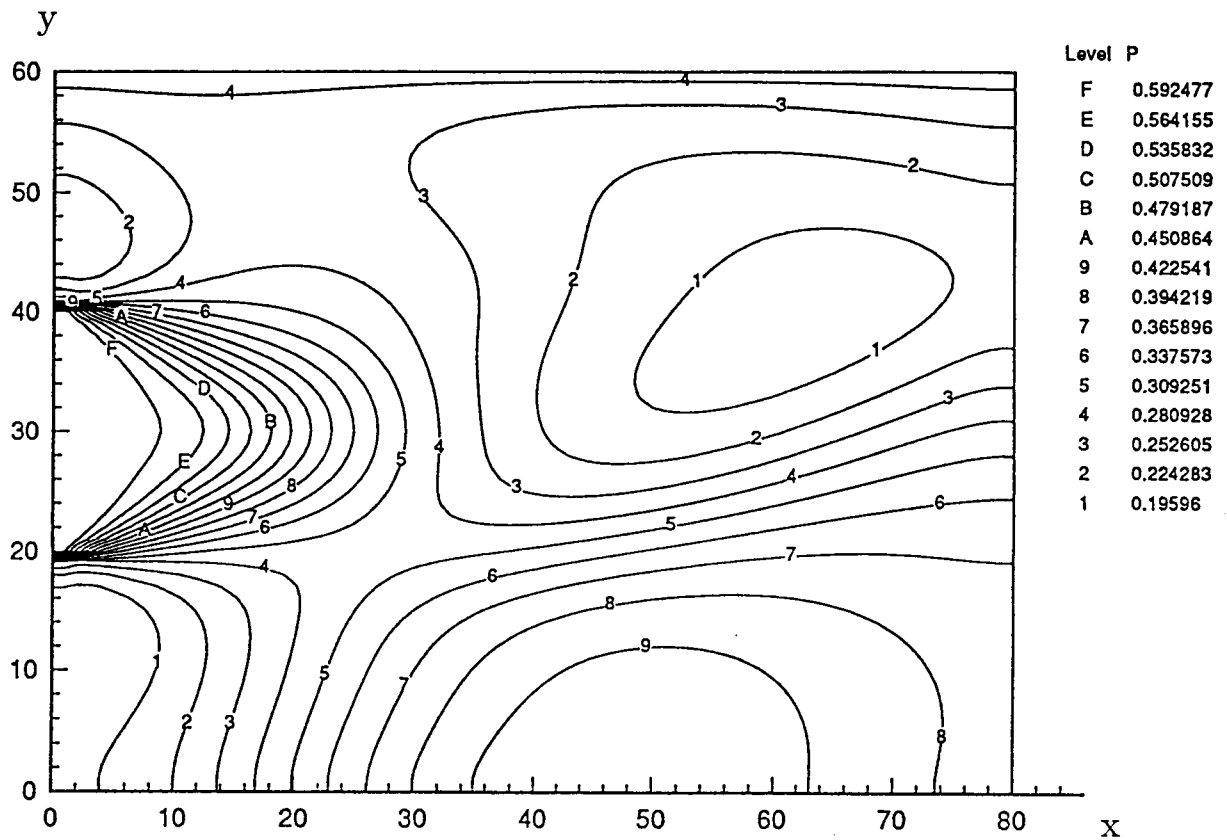


FIG. 5: Isobares dans le plan de symétrie de la configuration 2D

## 6 Problème de l'interaction de deux jets en configuration bidimensionnelle avec déséquilibre rotationnel

Le calcul de l'interaction de deux jets parallèles et identiques a été effectué sur la base des équations QGDR en configuration 2D dans une configuration géométrique qui correspond aux expériences de [20]. Les équations QGDR, dont l'établissement peut être trouvé dans [14] sont rappelées dans l'annexe B.

Le domaine de calcul est un rectangle (Fig.1, configuration C). On utilise des grandeurs sans dimension en introduisant des grandeurs de référence (paramètres du gaz dans la section de sortie des tuyères) : la masse volumique  $\rho_{ref}$ , la température de translation  $T_{ref}$ , la vitesse du son  $a_{ref} = \sqrt{\gamma(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_{ref}}$ , le libre parcours moyen  $\lambda_{ref}$ . Le temps de relaxation Maxwellien se calcule par l'équation 8, mais en considérant ici la température de translation. En supposant que les molécules sont de type VHS ( $\mu \propto T^\omega$ ), on a

$$\tau = \gamma^{\omega-0.5} \frac{15\sqrt{2\pi}}{2(7-2\omega)(5-2\omega)} \left(\frac{p_t}{\rho}\right)^\omega \frac{1}{p_t}.$$

Le temps de relaxation rotationnel qui intervient dans les termes d'échange des équations QGDR se calcule comme  $\tau_r = Z\tau_c$ , où  $\tau_c$  est le temps moyen entre collisions

$$\tau_c = \tau/\Omega(\omega), \quad \Omega(\omega) = 30/((7-2\omega) \cdot (5-2\omega)), \quad (12)$$

$Z$  est le nombre de collisions caractéristique de la relaxation rotationnelle. Pour de l'azote, on prend ici  $Z = 5$ . Mais on peut trouver dans la littérature des expressions de  $Z$  qui prennent en compte une dépendance de la température [11], [21]. Enfin, on prend  $\omega = 0.75$ .

La méthode aux différences finies est analogue à celle des calculs précédents, à part que l'on a introduit ici une viscosité artificielle (comme dans [8], à savoir  $\tau \rightarrow \tau + \beta h_{min}/2\sqrt{T_t}$  dans certains termes,  $h_{min}$  est le pas minimal en espace,  $\beta = 0.2$ ). On utilise un maillage spatial  $120 \times 30$  (respectivement en x,y). Pour  $0 \leq j \leq 20$ , le maillage est uniforme en x et y avec un pas  $h = 10$ , ( $j$  est l'indice du maillage en y). Pour  $j > 20$  le pas en y augmente en progression géométrique de raison 1.1. Le coin en bas à gauche du domaine de calcul correspond aux coordonnées  $(0, -h/2)$ , les dimensions de celui-ci sont  $1190 \times 349.374$ . La position de la tuyère est déterminée par  $x = 0, 150 \leq y \leq 180$ . Le nombre de Knudsen, est défini comme le rapport du libre parcours moyen à la largeur de la tuyère  $Kn \approx 0.033$ .

Les conditions initiales sont

- dans le prolongement de la tuyère ( $0 \leq x \leq 1190, 150 \leq y \leq 180$ ) :

$$\rho = \rho_e = 1, \quad p_t = p_r = p_e = 1/\gamma, \quad T_t = T_r = T_e = 1, \quad u_x = Ma, \quad u_y = 0,$$

- ailleurs

$$\rho = \rho_{inf} = 0.01\rho_e, \quad p_t = p_r = p_{inf} = 0.01 p_e, \quad T_t = T_r = T_{inf} = T_e = 1, \quad u_x = u_y = 0.$$

Par analogie avec  $p_t$ , on a posé  $p_r = n k T_r$ .

Les conditions aux limites sont

- dans la section de sortie

$$\rho = \rho_e, \quad p_t = p_r = p_e, \quad u_x = Ma, \quad u_y = 0;$$

l'écoulement est parallèle et uniforme ;

- sur les parois solides (le reste de l'axe y)

$$T_{wall} = 1.47 T_e \quad \partial p_t / \partial n = 0, \quad p_r = p_t, \quad \rho = \gamma p_t / T_{wall}, \quad u_x = u_y = 0;$$

- sur la frontière supérieure et celle opposée au plan de la tuyère : "soft conditions"

$$\partial \rho / \partial n = \partial p_t / \partial n = \partial p_r / \partial n = \partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = 0.$$

( $\partial / \partial n$  désigne la dérivée normale à la frontière) ;

- sur la frontière inférieure, on introduit des conditions de symétrie, ce qui permet de simuler l'interaction entre les jets par une réflexion sur un plan de symétrie, placé en  $y = 0$ .

Au delà de l'instant initial, la pression du gaz extérieur n'intervient pas dans les conditions aux limites et on simule donc une détente dans le vide.

Le pas de temps se calcule par la formule

$$h_t = \alpha h_{min}^2 / u_{max},$$

où  $u_{max} = \max(\max(\sqrt{T_t}, \sqrt{T_r}) + \sqrt{u_x^2 + u_y^2})$ . Le critère de convergence était analogue à l'Eq.(10), avec  $\varepsilon = 6.28 \cdot 10^{-6}$ .

Le calcul a été effectué pour les paramètres suivants : Nombre de Mach en sortie de tuyère  $Ma = 4.22$ , gaz diatomique simulant l'azote ( $Pr = 14/19$ ,  $\gamma = 7/5$ ,  $\omega = 0.75$ ). On a pris  $\alpha = 0.002$  et  $\beta = 0.2$ . Le nombre de pas de temps jusqu'à la convergence était de l'ordre de 18200.

Sur les figures 6–10, on a tracé respectivement les lignes d'égale densité, température translationnelle, température rotationnelle, composantes axiale (x) et transversale (y) de la vitesse. Sur la figure 11 on a tracé le champ du vecteur flux de masse et quelques lignes de courant. Le vecteur flux de masse  $\vec{j}$  se confond avec  $\rho\vec{u}$  dans le cas d'une fonction de distribution isotrope. Dans le cadre de la modélisation QGD, il a pour composantes, d'après [22]

$$\begin{aligned} j_x &= u_x \rho - \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p_t) - \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y) \\ j_y &= u_y \rho - \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_y) - \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p_t). \end{aligned}$$

En se reportant par exemple à l'annexe B, on voit que cette expression du flux massique permet d'écrire l'équation de continuité sous une forme dont la signification physique est plus apparente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y = 0$$

Sur la figure 12 on a tracé la répartition du flux thermique adimensionné comme précédemment

$$q = Pr^{-1} \tau p_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{5p_t + 2p_r}{2\rho}$$

le long de la paroi solide ( $x = h/2$ ) entre les deux tuyères. La coordonnée y est réduite par la distance entre la tuyère et l'axe de symétrie. L'expression de q est obtenue en sommant les termes de conduction dans la direction x présents respectivement dans les équations de conservation de l'énergie translationnelle et rotationnelle. On vérifie que lorsque  $T_t = T_r$  (d'où  $p_t = p_r$ ), on retrouve l'expression 11.

L'allure de la distribution de flux thermique est qualitativement semblable à celle obtenue expérimentalement [20], à savoir qu'elle présente un minimum dans le plan de symétrie (Fig.11). Cette observation est cohérente avec l'absence de point d'arrêt sur la paroi : il n'y a pas d'écoulement de retour,  $u_x$  reste positif (Fig.9). De même, la distribution de densité est qualitativement semblable à celle de l'expérience (Fig.6).

Le problème de l'interaction de deux jets a été traité dans [23] en configuration 3D par la méthode DSMC pour de l'Argon dans les conditions  $Ma_e \approx 2$  et  $Kn_e \approx 4 \times 10^{-4}$ . Elle a conduit à des distributions de densité en accord qualitatif avec celle du présent travail.

Two Jets 2D Ma=4.22 QGDR

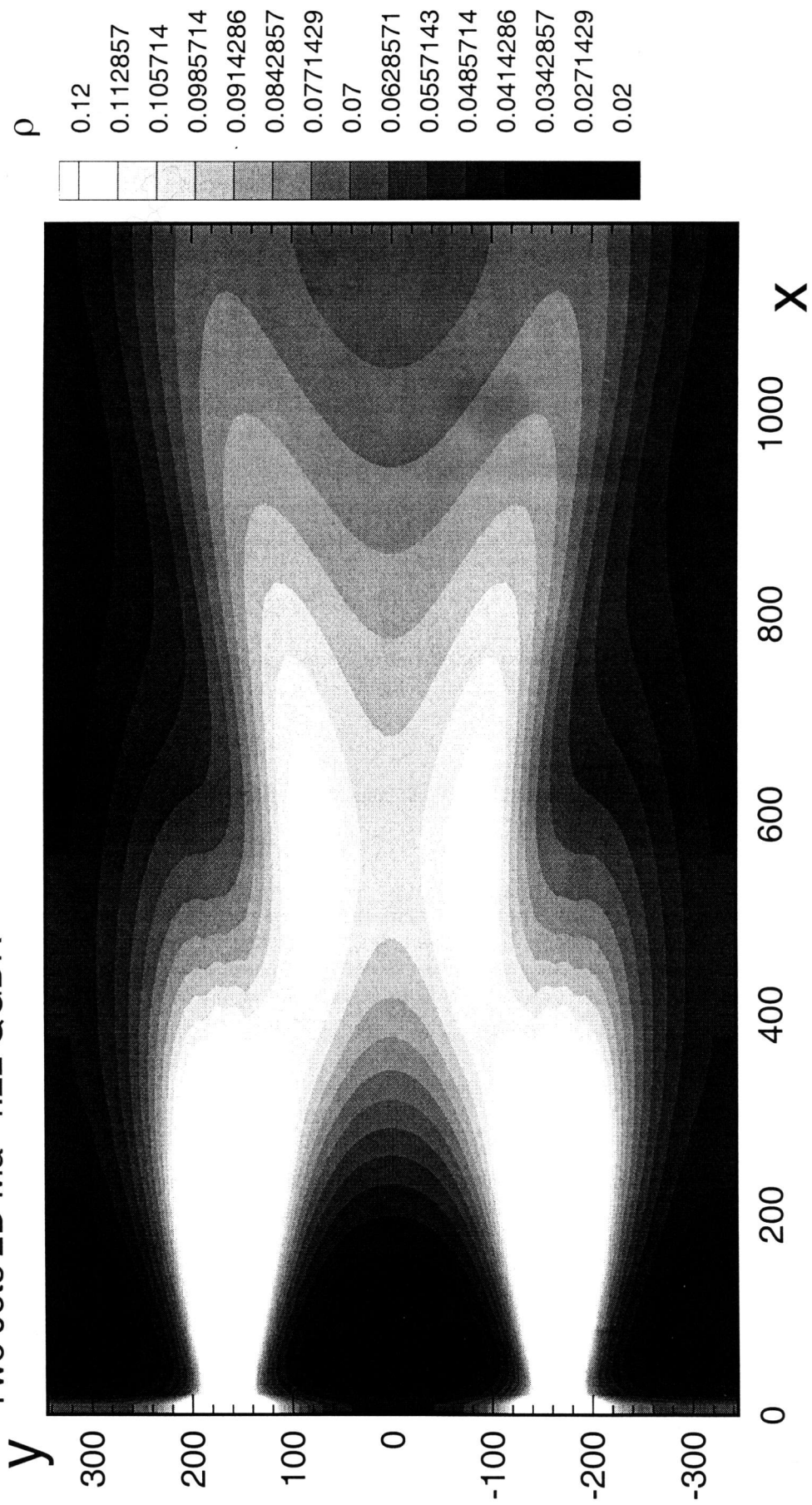


FIG. 6: Champ de densité en configuration C

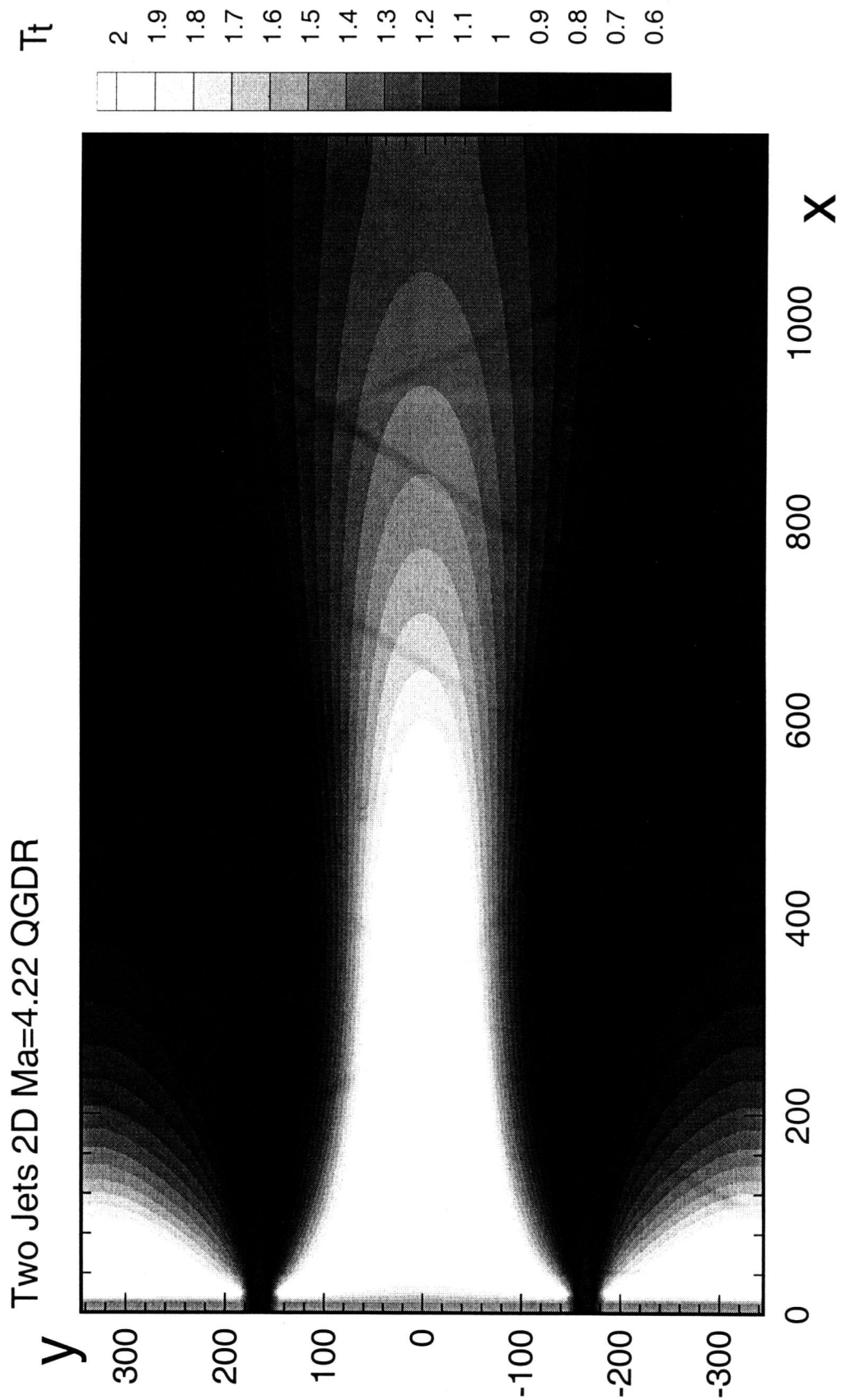


FIG. 7: Champ de température translationnelle en configuration C

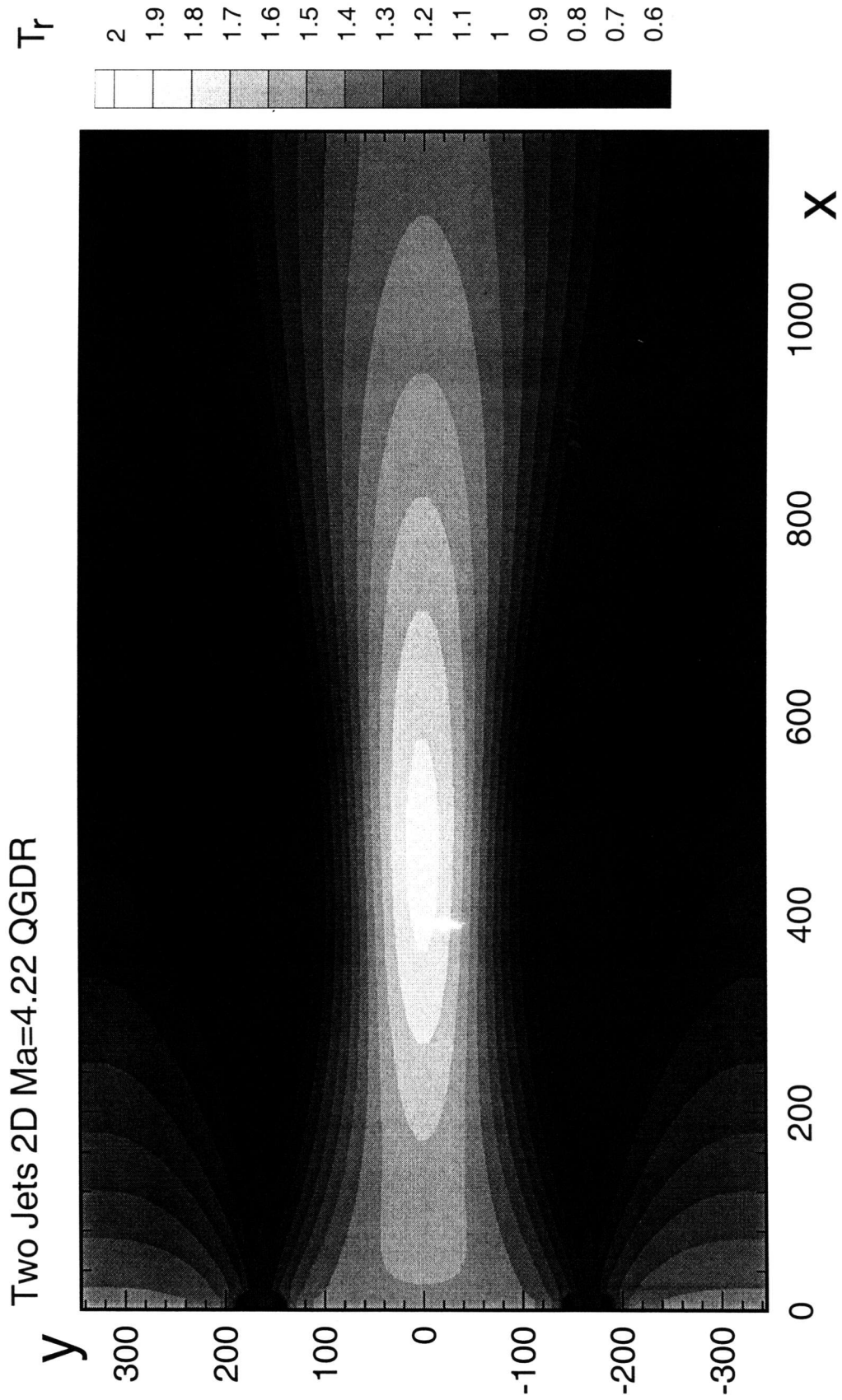


FIG. 8: Champ de température rotationnelle en configuration C

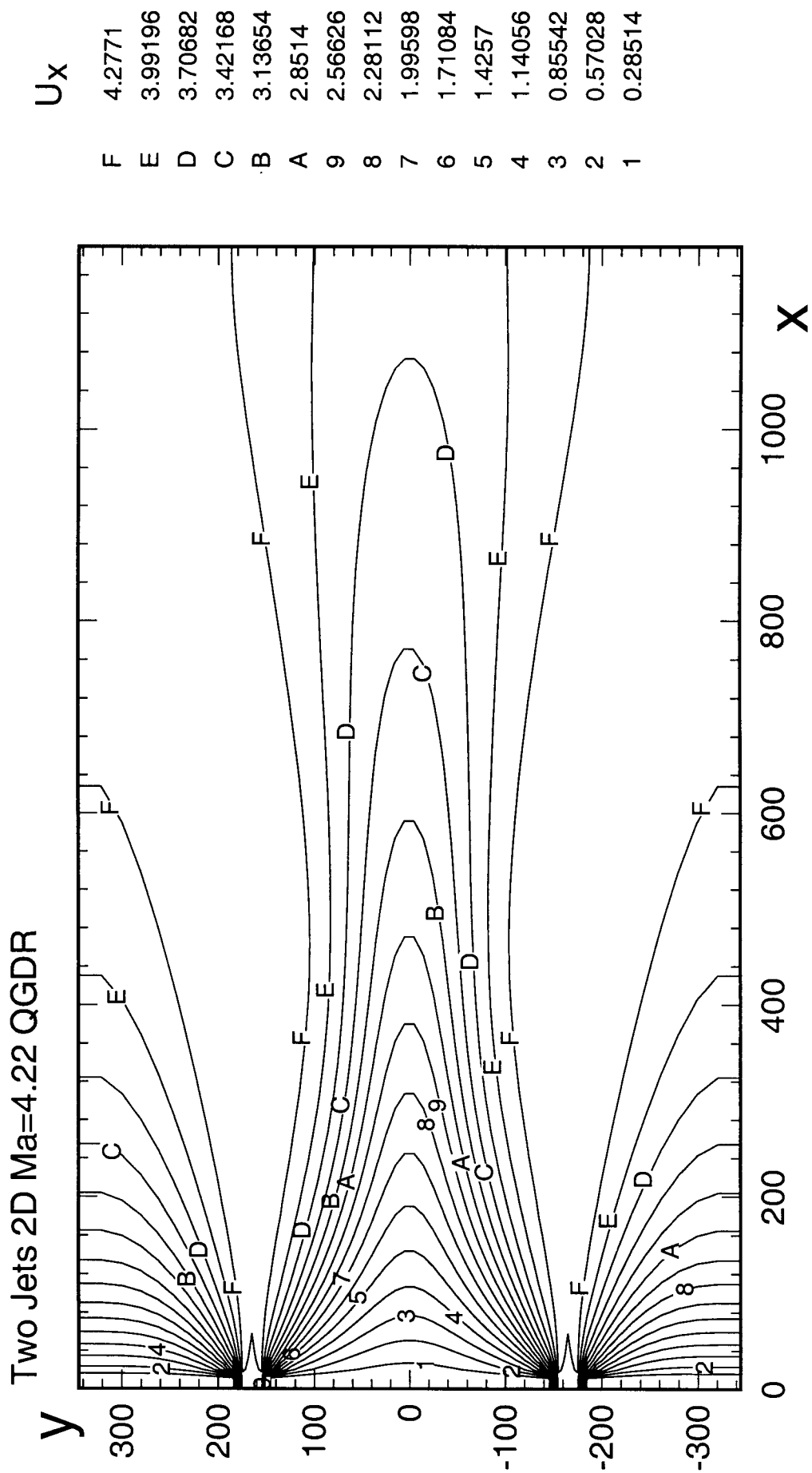


FIG. 9: Champ de la composante axiale de vitesse en configuration C



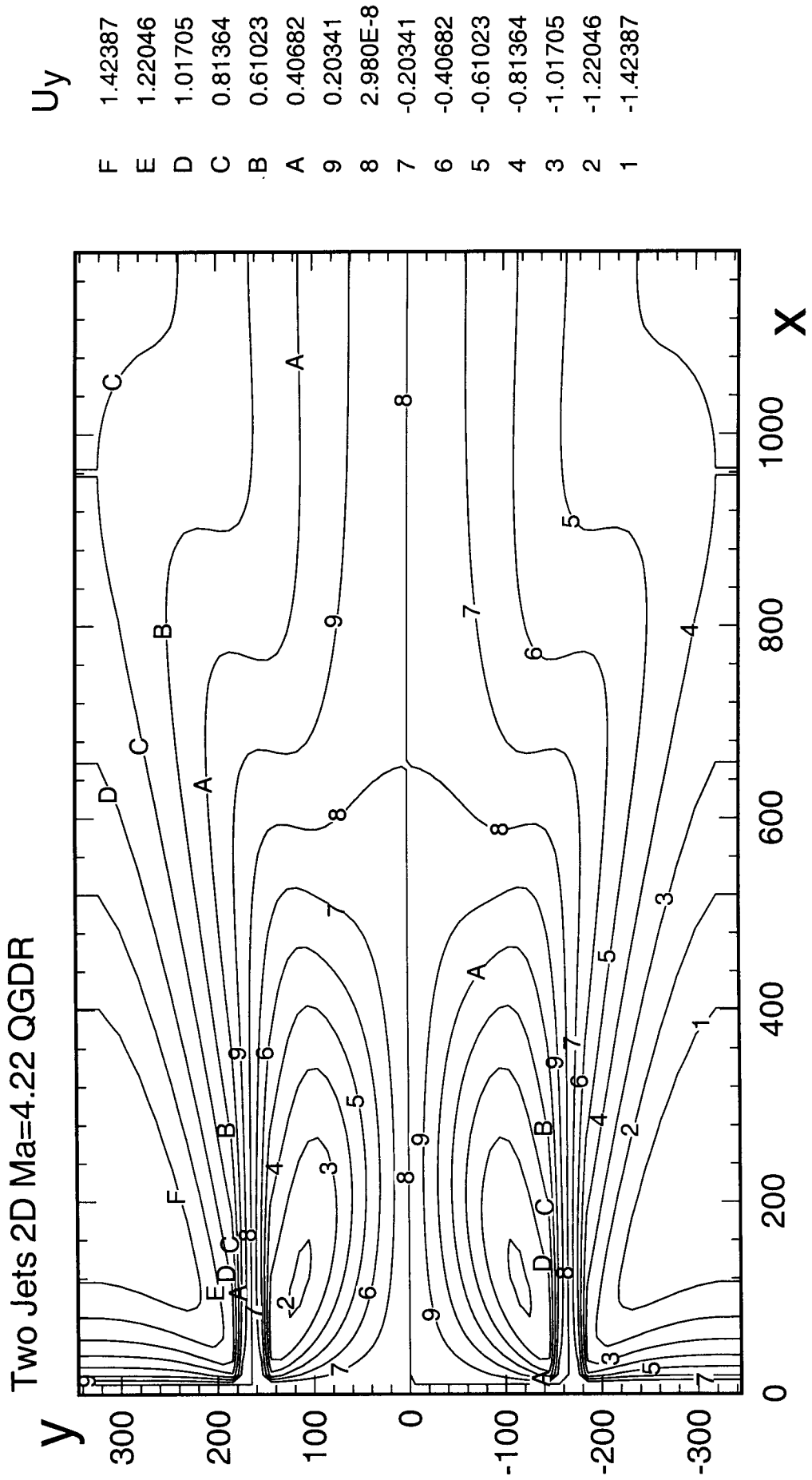


FIG. 10: Champ de la composante transversale de vitesse en configuration C

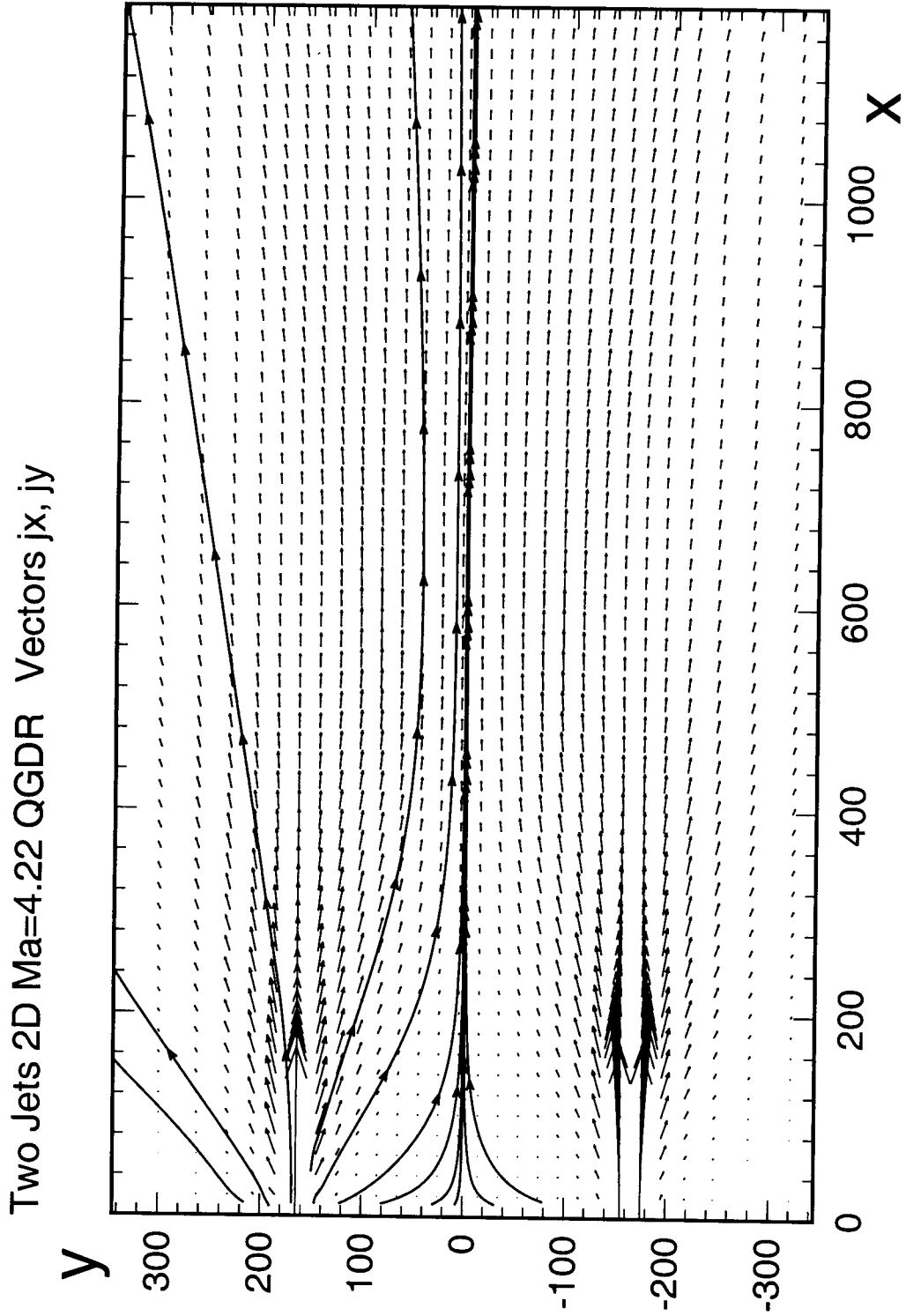


FIG. 11: Champ du vecteur flux de masse en configuration C

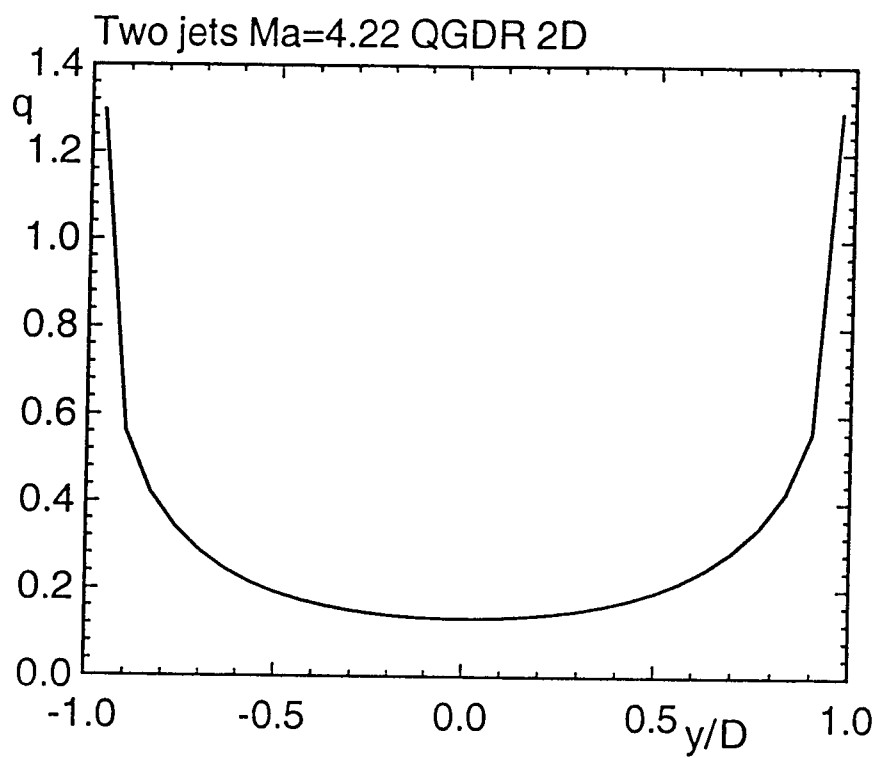


FIG. 12: Distribution du flux thermique à la paroi en configuration C

## 7 Jet plan en déséquilibre translationnel

Tous les calculs précédents supposent l'équilibre translationnel. Pour illustrer les limites de ces calculs et montrer la possibilité de prendre en compte le déséquilibre translationnel, on a utilisé les équations QGDT dans la forme de l'annexe C pour calculer un jet bidimensionnel issu d'une fente de hauteur  $d$  (Fig.1, configuration D). Les conditions de l'écoulement étaient les mêmes que celles du calcul DSMC présenté dans [24] : Les nombres de Mach et de Knudsen ( $Kn = \lambda_{ref}/d$ ) sont respectivement égaux à 2 et 0.1. Comme précédemment,  $\lambda_{ref}$  est le libre parcours moyen en sortie de tuyère. Le gaz est un gaz monoatomique de sphères rigides. Les grandeurs sans dimension sont introduites comme dans les paragraphes précédents. Le temps de relaxation Maxwellien se calcule à partir des grandeurs moyennes (Eqs.7) en utilisant l'équation 8. Le temps de relaxation  $\tau_c$  qui intervient dans les termes d'échange des équations QGDT et qui a été supposé égal au temps moyen entre collisions se relie à  $\tau$  par l'équation 12. On peut montrer [25] que la prise en compte de l'anisotropie de la fonction de distribution a une influence très faible sur les temps de relaxation, ce qui justifie ici l'usage des températures moyennes dans le calcul de  $\tau$  et  $\tau_c$ .

Un maillage uniforme rectangulaire avec  $h_x = h_y = 0.5$  et  $N_x = 91, N_y = 41$  a été utilisé. L'algorithme de calcul est analogue à celui des chapitres précédents et on peut trouver des détails dans les références [8],[10], [6].

Les conditions aux limites s'écrivent

- section de sortie de la tuyère ( $x = 0$ )

$$u_{xe} = Ma, \quad u_{ye} = 0, \quad \rho_e = 1,$$

$$T_{xe} = T_{ye} = T_{ze} = T_e = 1, \quad p_{xe} = p_{ye} = p_{ze} = p_e = 1/\gamma;$$

- plan de symétrie ( $y = 0$ )

$$\partial u_x / \partial y = 0, \quad u_y = 0, \quad \partial p_x / \partial y = \partial p_y / \partial y = \partial p_z / \partial y = 0, \quad \partial T_x / \partial y = \partial T_y / \partial y = \partial T_z / \partial y = 0;$$

- frontières gauche ( $x = 0$ , ailleurs que dans la sortie de tuyère) et droite (aval) (soft conditions)

$$\partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = 0, \quad \partial p_x / \partial x = \partial p_y / \partial x = \partial p_z / \partial x = 0, \quad \partial T_x / \partial x = \partial T_y / \partial x = \partial T_z / \partial x = 0.$$

- frontière supérieure (latérale) (soft conditions)

$$\partial u_x / \partial y = \partial u_y / \partial y = 0, \quad \partial p_x / \partial y = \partial p_y / \partial y = \partial p_z / \partial y = 0, \quad \partial T_x / \partial y = \partial T_y / \partial y = \partial T_z / \partial y = 0.$$

Pour assurer la cohérence avec le problème traité par DSMC, une attention particulière a été apportée aux conditions aux limites.

Les conditions aux limites du calcul DSMC sont imposées en termes de flux moléculaire entrant dans le domaine de calcul et de fonctions de distribution pour les molécules entrantes. Sur les frontières libres (c-à-d autres que la sortie de la tuyère), l'écoulement macroscopique est sortant et on a considéré que le nombre de Mach était suffisamment élevé pour que le flux moléculaire entrant soit pris égal à zéro.

La formulation des conditions aux limites du calcul QGD a été adaptée pour imposer aussi un flux moléculaire entrant nul sur les frontières libres. D'une façon générale, les grandeurs macroscopiques qui interviennent dans les équations QGD sont reliées aux grandeurs moléculaires par des intégrales sur l'ensemble de l'espace des vitesses. Dans le présent cas, on limite les intégrales au domaine de l'espace des vitesses qui assure la sortie des molécules et interdit leur entrée. Par exemple, sur la frontière droite du domaine, les intégrales seront du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_z \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_y \int_0^{\infty} \dots d\xi_x. \quad (13)$$

Sur les frontières gauche et supérieure, elles seront respectivement du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_z \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_y \int_{-\infty}^0 \dots d\xi_x \quad \text{I} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_z \int_0^{\infty} d\xi_y \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_x. \quad (14)$$

Ces intégrales "incomplètes" peuvent s'exprimer en fonction des intégrales "complètes" usuelles. Dans l'expression des conditions aux limites indiquées plus haut, on remplace donc les grandeurs macroscopiques

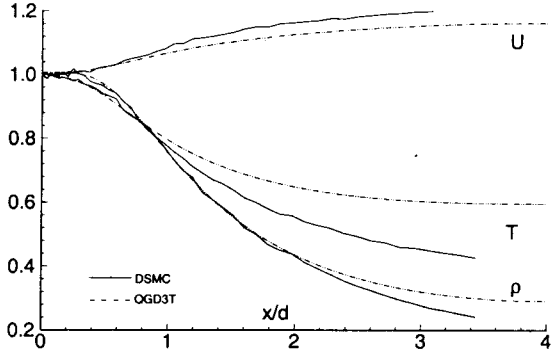


FIG. 13: Evolution des paramètres de l'écoulement le long de l'axe du jet en configuration D (jet bidimensionnel, QGDT et DSMC)

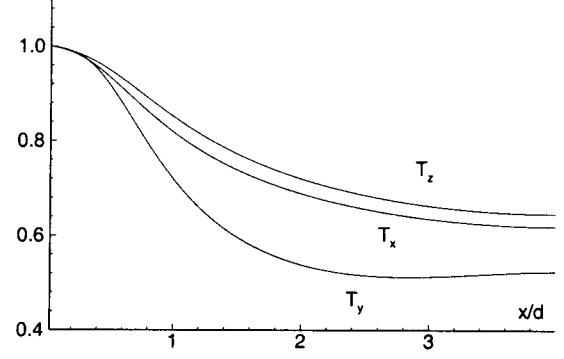


FIG. 14: Evolution des températures dans chaque direction le long de l'axe du jet en configuration D (jet bidimensionnel, QGDT)

“classiques” (correspondant à des intégrales sur l'ensemble de l'espace des vitesses) par des expressions analytiques correspondant aux intégrales “incomplètes”. Dans l'annexe D on expose l'ensemble des substitutions qui doivent s'appliquer pour l'expression des conditions aux limites aux frontières droite et gauche. Des expressions analogues doivent être employées pour la frontière supérieure, en échangeant les variables  $x$  et  $y$ .

L'évolution de la densité, de la vitesse et de la température moyenne obtenue par les équations QGDT est cohérente avec celle obtenue par DSMC, dans la région proche de la tuyère, c'est-à-dire là où les collisions sont suffisantes pour maintenir une situation de proche équilibre thermodynamique Fig.13. Malheureusement, l'évolution des températures  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  obtenue par DSMC n'était pas disponible pour ces conditions. Cependant les résultats obtenus par les équations QGDT (Fig.14) sont en accord qualitatif avec ceux obtenus pour  $Kn = 0.25$  par DSMC.

Les champs d'écoulement obtenus par DSMC et QGDT sont présentés sur les figures suivantes. Les plus grandes différences sont observées dans les zones très raréfiées au dessus de la tuyère et près de la frontière droite :

- Figs.15-16 : champs de densité.
- Figs.17-18 : champs de  $u_x$ .
- Figs.19-20 : champs de la composante  $x$  du flux massique  $j_x$ . La comparaison ne peut être ici que qualitative car le flux massique réel n'a pas été enregistré lors des calculs DSMC. Sur la figure 19,  $j_x$  est estimé comme  $j_x = u_x \rho$ , alors que pour les résultats QGDT, il se calcule comme

$$j_x = u_x \rho - \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p_x) - \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y).$$

Notons qu'en utilisant une expression analogue pour  $j_y$  (en échangeant  $x$  et  $y$ ), l'équation de continuité de l'annexe C retrouve encore une forme dont la signification physique est claire

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y = 0$$

- Figs.21-22 : champs du vecteur flux massique  $\vec{j}$  et lignes de courant correspondantes.
- Figs.23 : A titre indicatif, on a représenté les isolignes du libre parcours moyen local  $\lambda$  adimensionné par la largeur  $d$  de la tuyère. Cette grandeur n'est pas la plus représentative du degré de déséquilibre de l'écoulement, mais on voit que ce nombre sans dimension augmente considérablement dans le jet, ce qui est cohérent avec l'important déséquilibre translationnel constaté sur la Fig.14.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95

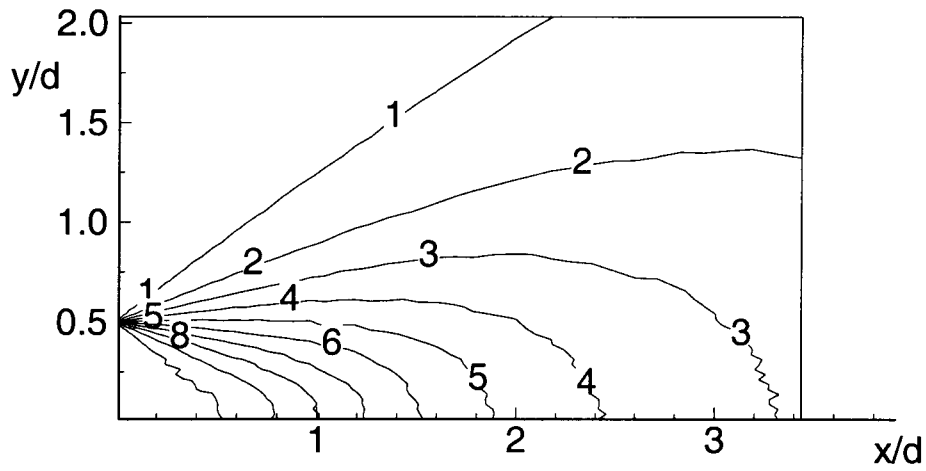


FIG. 15: Champ de densité en configuration D (DSMC)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95

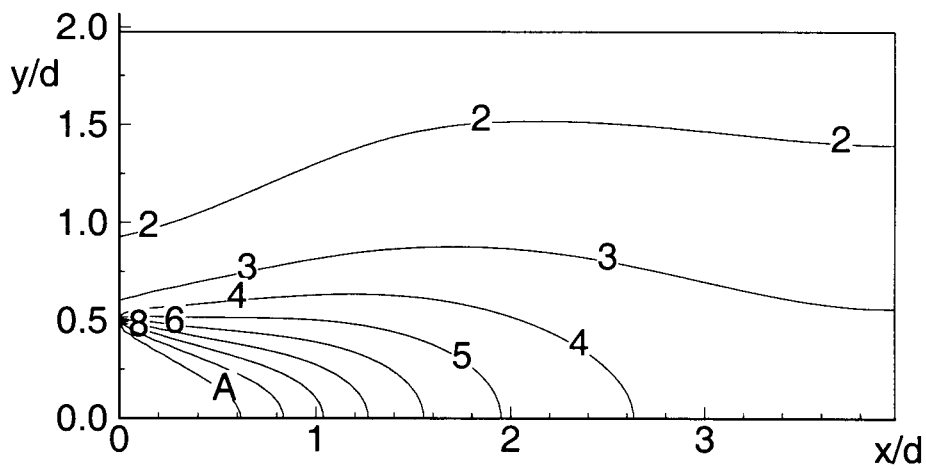


FIG. 16: Champ de densité en configuration D (QGDT)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0.03	0.15	0.27	0.39	0.50	0.62	0.74	0.86	0.98	1.09

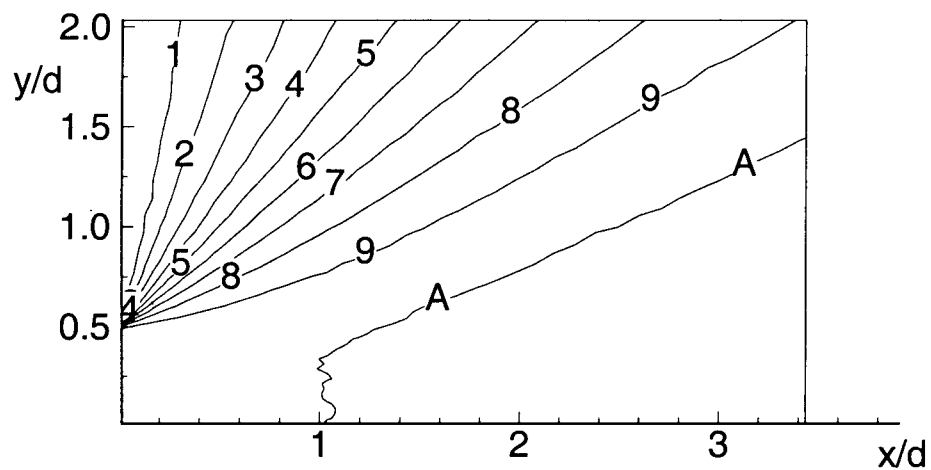


FIG. 17: Champ de la composante axiale de vitesse en configuration D (DSMC)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0.03	0.15	0.27	0.39	0.50	0.62	0.74	0.86	0.98	1.09

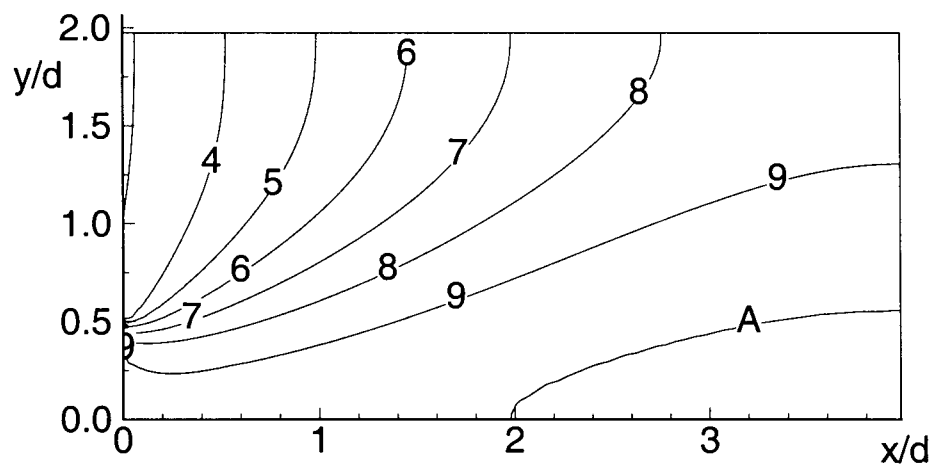


FIG. 18: Champ de la composante axiale de vitesse en configuration D (QGDT)

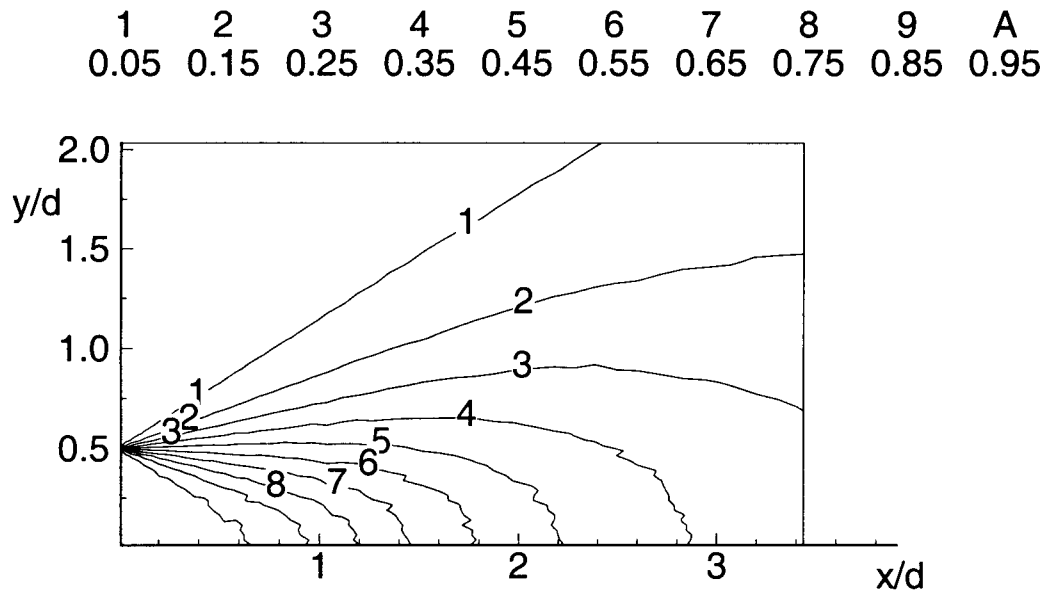


FIG. 19: Champ de la composante axiale  $j_x$  du flux de masse en configuration D (DSMC)

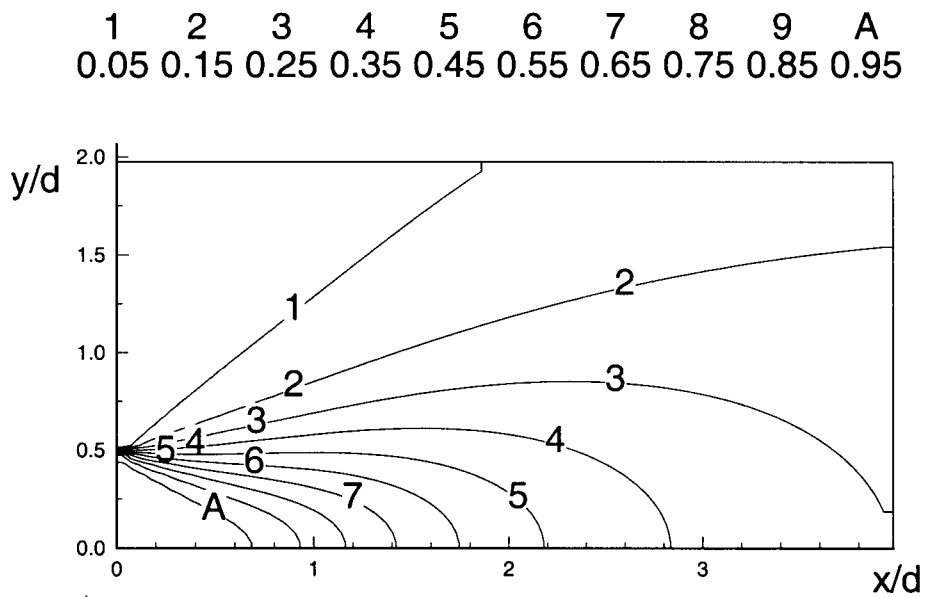


FIG. 20: Champ de la composante axiale  $j_x$  du flux de masse en configuration D (QGDT)



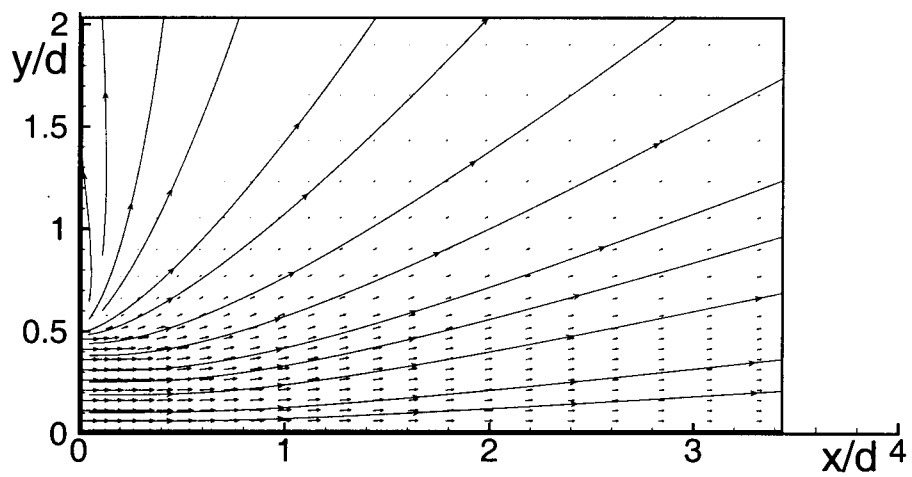


FIG. 21: Champ du vecteur flux de masse  $\vec{j}$  en configuration D (DSMC)

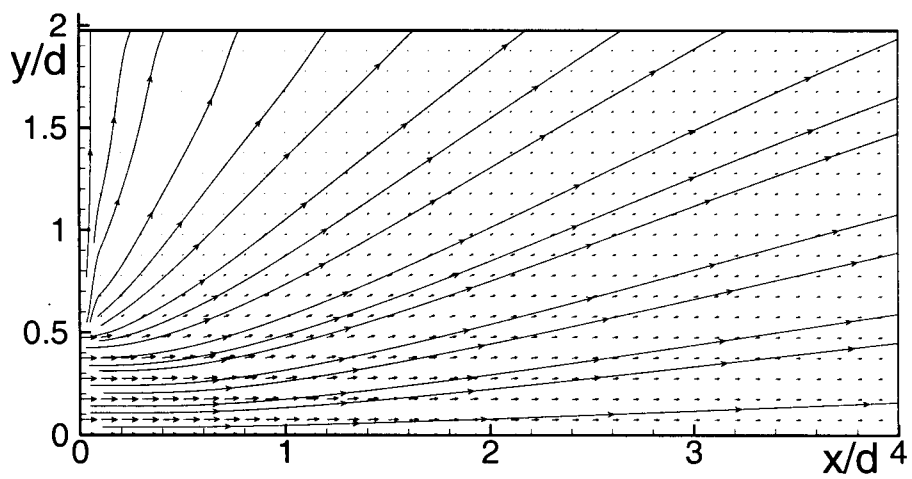


FIG. 22: Champ du vecteur flux de masse  $\vec{j}$  en configuration D (QGDT)

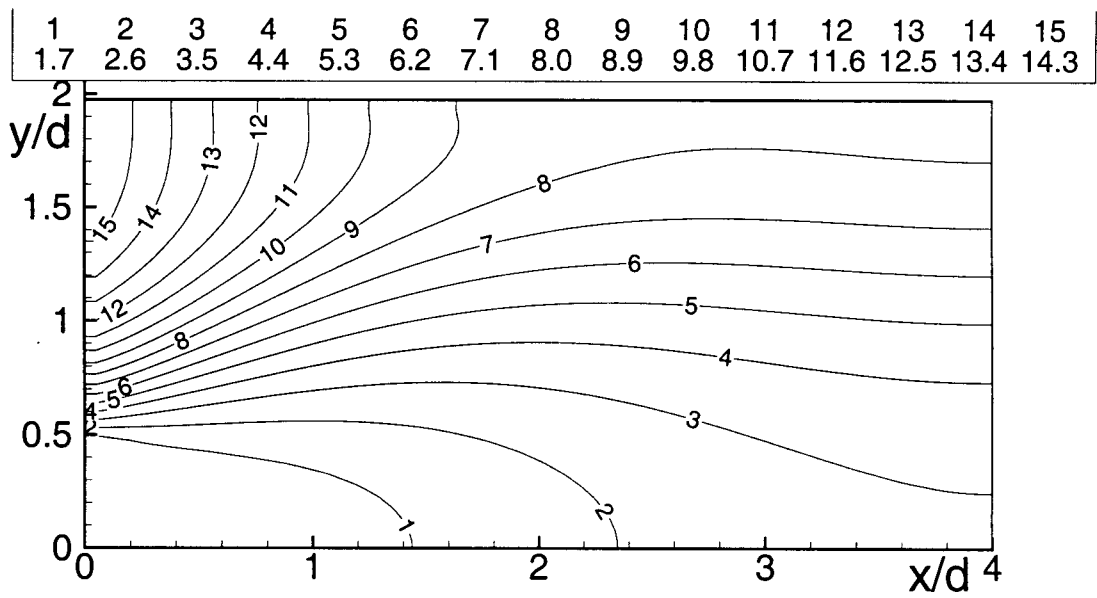


FIG. 23: Champ du libre parcours moyen réduit  $\lambda/d$  en configuration D (DSMC)

## 8 Conclusion

On a établi une généralisation des équations QGD prenant en compte le déséquilibre translationnel (QGDT). Les équations obtenues ont été adaptées à des coordonnées cylindriques.

Les équations QGDT peuvent être utilisées pour mettre en évidence les zones de déséquilibre translationnel, ce qui, associé à un critère de déséquilibre, permet de délimiter les zones d'un écoulement accessibles par une approche continue.

On a démontré la faisabilité de calculs de jets sous-détendus sur la base des équations QGD et de leurs généralisations à des situations de déséquilibre translationnel (QGDT) ou rotationnel (QGDR). On a considéré des gaz mono- et diatomiques, des configurations 2D et 3D et des nombres de Mach en sortie de tuyère représentatifs de conditions rencontrées dans des applications réelles. Toutefois, les nombres de Knudsen considérés ici sont en général trop grands pour être représentatifs.

Le calcul de configurations réelles tridimensionnelles est maintenant envisageable en mettant en œuvre des ressources de calcul plus importantes.

## A Système d'équations QGD en coordonnées cartésiennes xyz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z = \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x u_z) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_y u_z) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_z u_x) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_z u_y) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2 + p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y u_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z u_x = \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^3 + 3u_x p) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x^2 u_y + u_y p) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x^2 u_z + u_z p) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 u_y + u_y p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 u_x + u_x p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x u_y u_z) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 u_z + u_z p) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2 u_x + u_x p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_y + \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p) + \frac{\partial}{\partial z} \rho u_z u_y = \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 u_y + u_y p) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y^2 + u_x p) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x u_y u_z) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_y^2 u_x + u_x p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^3 + 3u_y p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z u_y^2 + u_z p) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_z u_y^2 + u_z p) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2 u_y + u_y p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_z + \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y u_z + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2 + p) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 u_z + u_z p) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x u_z^2 + u_x p) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 u_z + u_z p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_y u_z^2 + u_y p) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_z^2 u_x + u_x p) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_z^2 u_y + u_y p) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^3 + 3u_z p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} (E u_x + p u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E u_y + p u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E u_z + p u_z) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} ((E + 2p) u_x^2 + \frac{1}{2} p (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} ((E + 2p) u_x u_y) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial z} ((E + 2p) u_x u_z) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} ((E + 2p) u_y u_x) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} ((E + 2p) u_y^2 + \frac{1}{2} p (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial z} ((E + 2p) u_y u_z) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial x} ((E + 2p) u_z u_x) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial y} ((E + 2p) u_z u_y) + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{\partial}{\partial z} ((E + 2p) u_z^2 + \frac{1}{2} p (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)) + \\ Pr^{-1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau p \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \tau p \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \tau p \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho} \right] + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p + \frac{\partial}{\partial z} \tau \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p \right). \end{aligned}$$

$$E = \frac{\rho}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{p}{\gamma - 1}.$$

## B Système d'équations QGDR en coordonnées cartésiennes xy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p_t) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} \rho u_x u_y + \\ \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} \rho u_y u_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p_t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^3 + 3u_x p_t) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x^2 u_y + u_y p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 u_y + u_y p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 u_x + u_x p_t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_y + \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p_t) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 u_y + u_y p_t) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y^2 + u_x p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_y^2 u_x + u_x p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^3 + 3u_y p_t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_t + \frac{\partial}{\partial x} u_x (E_t + p_t) + \frac{\partial}{\partial y} u_y (E_t + p_t) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} ((E_t + 2p_t)u_x^2 + \frac{1}{2}p_t(u_x^2 + u_y^2)) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} u_x u_y (E_t + 2p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} u_y u_x (E_t + 2p_t) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} ((E_t + 2p_t)u_y^2 + \frac{1}{2}p_t(u_x^2 + u_y^2)) + \\ Pr^{-1} \frac{5}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau p_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_t}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \tau p_t \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_t}{\rho} \right] + \frac{5}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p_t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p_t + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{p_t}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p_t \right) + S_t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} u_x E_r + \frac{\partial}{\partial y} u_y E_r &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} u_x^2 E_r + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} u_x u_y E_r + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x} u_y u_x E_r + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y} u_y^2 E_r + \\ Pr^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau p_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_r}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \tau p_t \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_r}{\rho} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p_r}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p_t + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{p_r}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p_t + S_r. \end{aligned}$$

$$S_t = \frac{3}{5\tau_r} (p_r - p_t); \quad S_r = -S_t; \quad E_t = \frac{\rho(u_x^2 + u_y^2)}{2} + \frac{3p_t}{2}; \quad E_r = p_r.$$

$$\gamma = 7/5, \quad Pr = 14/19, \quad p_t = \rho(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_t, \quad p_r = \rho(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_r.$$

## C Système d'équations QGDT en coordonnées cartésiennes xy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho u_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho u_y &= \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2 + p_x) + \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2 + p_y), \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho u_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2 + p_x) + \frac{\partial}{\partial y}\rho u_y u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^3 + 3u_x p_x) + \\
\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x^2 u_y + u_y p_x) + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2 u_y + u_y p_x) &+ \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2 u_x + u_x p_y), \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho u_y + \frac{\partial}{\partial x}\rho u_x u_y + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2 + p_y) &= \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2 u_y + u_y p_x) + \\
\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y^2 + u_x p_y) + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_y^2 u_x + u_x p_y) &+ \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^3 + 3u_y p_y), \\
\frac{\partial}{\partial t}E_x + \frac{\partial}{\partial x}u_x(E_x + p_x) + \frac{\partial}{\partial y}E_x u_y &= \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial x}u_x^2(E_x + \frac{5}{2}p_x) + \\
\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial y}u_x u_y(E_x + p_x) + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial x}u_y u_x(E_x + p_x) &+ \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial y}(E_x u_y^2 + \frac{1}{2}u_x^2 p_y) + \\
Pr^{-1}[\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{3}{2}p_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{p_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{1}{2}p_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{p_x}{\rho}] &+ \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{p_x}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}\frac{3}{2}p_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{p_x}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}p_y + S_x. \\
\frac{\partial}{\partial t}E_y + \frac{\partial}{\partial x}E_y u_x + \frac{\partial}{\partial y}u_y(E_y + p_y) &= \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial x}(E_y u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 p_x) + \\
\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial y}u_x u_y(E_y + p_y) + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial x}u_x u_y(E_y + p_y) &+ \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial y}u_y^2(E_y + \frac{5}{2}p_y) + \\
Pr^{-1}[\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{1}{2}p_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{p_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{3}{2}p_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{p_y}{\rho}] &+ \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{p_y}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}p_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{p_y}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}\frac{3}{2}p_y + S_y. \\
\frac{\partial}{\partial t}E_z + \frac{\partial}{\partial x}E_z u_x + \frac{\partial}{\partial y}E_z u_y &= \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial x}(E_z u_x^2) + \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{\partial}{\partial y}(E_z u_x u_y) + \\
\frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial x}(E_z u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{\partial}{\partial y}(E_z u_y^2) &+ Pr^{-1}[\frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{1}{2}p_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{p_z}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{1}{2}p_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{p_z}{\rho}] \\
+ \frac{\partial}{\partial x}\tau \frac{p_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}p_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau \frac{p_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}p_y &+ S_z.
\end{aligned}$$

Ici,  $u_x$  et  $u_y$  sont les composantes du vecteur vitesse. Les composantes de l'énergie totale sont

$$E_x = \frac{\rho u_x^2}{2} + \frac{1}{2}p_x, \quad E_y = \frac{\rho u_y^2}{2} + \frac{1}{2}p_y, \quad E_z = \frac{1}{2}p_z.$$

Les termes d'échange s'écrivent comme dans l'Equation 6.

## D Transformation de certaines expressions à utiliser aux frontières libres

Cette annexe donne le détail des substitutions à effectuer dans l'expression des conditions aux limites aux frontières libres du domaine de calcul, pour le problème traité au paragraphe 7. L'écriture  $A \rightarrow B$  signifie que  $B$  doit être substitué à  $A$ . La forme des conditions aux limites est telle que la différence entre les expressions originales et les expressions substituées s'annule à la frontière et la substitution devient inutile. On ne donne ici que les substitutions nécessaires.

Dans l'équation de continuité :

$$\rho u_x \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \left( u_x F(-\beta) \pm 0.5 \sqrt{2 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_x} e^{-\beta^2} \right) = \mathcal{I}_1, \quad \rho u_x u_y \rightarrow u_y \times \mathcal{I}_1.$$

Dans l'équation en  $\rho u_x$  :

$$\rho u_x^2 + p_x \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \left( (u_x^2 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_x) F(-\beta) \pm 1.5 u_x \sqrt{2 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_x} e^{-\beta^2} \right) = \mathcal{I}_2, \quad u_y (\rho u_x^2 + p_x) \rightarrow u_y \times \mathcal{I}_2.$$

Dans l'équation en  $\rho u_y$  :

$$\rho u_x u_y \rightarrow u_y \times \mathcal{I}_1, \quad u_x (\rho u_y^2 + p_y) \rightarrow (u_y^2 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_y) \times \mathcal{I}_1.$$

Dans l'équation en  $E_x$  :

$$u_x (E_x + p_x) \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \left( 0.5 u_x (u_x^2 + 3 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_x) F(-\beta) \pm 0.5 \rho (3.5 u_x^2 + \mathcal{R} T_x) \sqrt{2 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_x} e^{-\beta^2} \right) = \mathcal{I}_3,$$

$$u_x u_y (E_x + p_x) \rightarrow u_y \times \mathcal{I}_3.$$

Dans l'équation en  $E_y$  :

$$u_x E_y \rightarrow 0.5 (u_y^2 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_y) \times \mathcal{I}_1, \quad u_x u_y (E_y + p_y) \rightarrow 0.5 u_y (u_y^2 + 3 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_y) \times \mathcal{I}_1.$$

Dans l'équation en  $E_z$  :

$$u_x E_z \rightarrow 0.5 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_z \times \mathcal{I}_1, \quad u_x u_y E_z \rightarrow 0.5 u_y \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T_z \times \mathcal{I}_1.$$

Ici,  $\beta = u_x / \sqrt{2(\mathcal{R}/\mathcal{M})T_x}$  et  $F(\beta)$  est une fonction définie, pour une frontière droite, comme

$$F(-\beta) = \int_{-\beta}^{\infty} e^{-t^2} dt = \begin{cases} 0.5\sqrt{\pi}(1 + \Phi(|\beta|)), & \beta \geq 0 \\ 0.5\sqrt{\pi}(1 - \Phi(|\beta|)), & \beta < 0, \end{cases}$$

où  $\Phi$  est la fonction d'erreur

$$\Phi(A) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^A e^{-t^2} dt, \quad A > 0.$$

Pour une frontière gauche, on prend

$$F(-\beta) = \int_{-\infty}^{-\beta} e^{-t^2} dt = \begin{cases} 0.5\sqrt{\pi}(1 - \Phi(|\beta|)), & \beta \geq 0 \\ 0.5\sqrt{\pi}(1 + \Phi(|\beta|)), & \beta < 0. \end{cases}$$

Dans les intégrales  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  et  $\mathcal{I}_3$ , on prend respectivement les signes + et - pour les frontières droite et gauche.

## Références

- [1] Beylich A.E. : *Structure and applications of jets*, 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.1, pp.553–566.
- [2] Ivanov M.S., Markelov G.N., Gerashimov Yu.I., Krylov A.N., Mishina L.V., Sokolov E.I. : *Free-flight experiment and numerical simulation for cold thruster plume*, AIAA 98-0898.
- [3] Elizarova T.G., Chetverushkin B.N. : *Kinetic algorithms for calculating gasdynamic flows*, J.Comput. Mathem. and Mathem. Phys., 1985, V.25, No5, pp.164–169.
- [4] Elizarova T.G., Chetverushkin B.N. : *Using kinetical models for calculating gasdynamic flows*, Mathematical Modeling., Ed. A.A.Samarskii, Moscow, Nauka, 1986, pp.261–278.
- [5] Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.C., Chpoun A. : *Rarefied gas flow simulation based on quasigasdynamic equations*, AIAA Journal, 1995, V.33, No12, pp.2316–2324.
- [6] Graur I.A., Elizarova T.G., Lengrand J.C. : *Quasigasdynamic equations with multiple translational temperatures*, Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, Meudon (Fr), R 97-1, 1997.
- [7] Elizarova T.G., Lengrand J.C., Graur I.A. : *Gradient expansions for distribution functions and derivation of moment equations*, Proceedings of 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.1, pp.119–126.
- [8] Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.C., Chpoun A. : *Rarefied gas flow simulation based on quasigasdynamic equations*, Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, Meudon (Fr), R 94-4, 1994.
- [9] Elizarova T.G., Graur I.A., Chpoun A., Lengrand J.C. : *Comparison of continuum and molecular approaches for the flow around a perpendicular disk*, Proceedings of the 20th International Symposium on Shock Waves, dir. Sturtevant B. et al., World Scientific, 1997, pp.795–800.
- [10] Lengrand J.C., Chpoun A., Graur I.A., Elizarova T.G. : *Supersonic rarefied gas flow around a perpendicular disk*, Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, Meudon (Fr), R 95-6, 1995.
- [11] Bird G.A. : *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [12] Graur I.A., Elizarova T.G., Lengrand J.C. : *Calculation of shock wave structure based on QGD model with multiple translational temperatures*, Proceedings of the 21th International Symposium on Shock Waves, dir. Houwing AFP, 1998, paper 3530.
- [13] Chirokov I.A., Elizarova T.G., Lengrand J.C. : *Numerical study of shock wave structure based on quasigasdynamic equations with rotational nonequilibrium*, Proceedings of 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.1, pp.175–182.
- [14] Elizarova T.G., Chirokov I.A. : *A macroscopic gas model with translational and rotational nonequilibrium*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1999, Vol.39, No 1, pp.135–146.
- [15] Aristov V.V. : *Numerical analysis of free jets at small Knudsen numbers*, Proc. of the 19th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Oxford, Univ. Press, 1995, Vol.II, pp.1293–1299.
- [16] Teshima K., Nakatsuji H. : *Structures of freejets from slit orifices*, Proc. of the 15th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Grado, Italy, 1986, Vol.II, pp.595–604.
- [17] Dupeyrat G. : *Two- and three-dimensional aspects of a freejet issuing from a long rectangular slit*, Proc. of the 12th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Charlottesville, USA, 1980, S.S. Fisher Ed., AIAA Press, New York, 1981, pp.812–819.
- [18] Allegre J., Bisch D., Lengrand J.C. : *Interaction of a simulated rocket exhaust plume with a wall : influence of singularities*, Proc. Second European Spacecraft Propulsion Conference, 27–29 May, 1997. (ESA SP-398, Aug 1997), pp. 611–616.
- [19] Hyakutake T., Nishida M. : *DSMC simulation of normal, parallel and oblique jet impingements on a flat plate*, 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.2, pp.561–568.
- [20] Allegre J., Lombardo G., Lengrand J.C. : *Experimental study of twin-plumes interacting with a simulated satellite wall*, Proc. Third European Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles, 24–26 November 1998, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, (ESA SP-426, December 1998), pp. 97–103.



- [21] Wysong I.J., Wadsworth D.C. : *Assessment of rotational collision number of Nitrogen at high temperatures and its possible effect on modeling of reacting shocks*, 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.2, pp.321–328.
- [22] Sheretov Yu.V. : *Quasihydrodynamic equations as a model for viscous compressible heat conductive flows*, in book : Implementation of functional analysis in the theory of approaches, Tver University, pp.127 - 155 (in Russian).
- [23] Usami M., Teshima K. : *Three dimensional DSMC calculation of interacting flowfield in two parallel underexpanded jets*, 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.2, pp.569–576.
- [24] Lengrand J.C. : *Méthode de Monte Carlo appliquée à un jet raréfié bidimensionnel*, Laboratoire d'Aérothermique du CNRS, Meudon (Fr), R 95-1, 1995.
- [25] Elizarova T.G., Lengrand J.C. : *Some Properties of a Gas with an Ellipsoidal Velocity Distribution Function*, 21th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Marseille, France, July 26–30, 1998, Ed. R.Brun et al., Cepadues, Toulouse, France, 1999, Vol.1, pp.143–149.

Réalisé par le Service Reprographie  
de la Délégation Ile de France Ouest et Nord  
1, place Aristide Briand – 92195 MEUDON Cédex