

# EFFETS DE RAREFACTION DANS LE PROCHE SILLAGE D'UN DISQUE EN ECOULEMENT SUPERSONIQUE

J.C. Lengrand<sup>1</sup>, T.G. Elizarova<sup>2</sup>, A. Chpoun<sup>1</sup>, I.A. Graur<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS  
1C avenue de la Recherche Scientifique, 45071 Orléans Cedex 2, France

<sup>2</sup>Institut de Modélisation Mathématique, Académie des Sciences de Russie  
4a Miuskaya sq., 125047 Moscou, Russie

**Abstract:** The present work illustrates the influence of rarefaction on the flow around a circular disk, facing a supersonic, low-density freestream. Numerical results were obtained by using two continuum approaches, based on Navier-Stokes (NS) and quasigasdynamic (QGD) equations, respectively. These results were compared with those obtained by using a direct simulation Monte Carlo (DSMC) method that can be considered as a reference. The freestream Mach number was varied from 2 to 20, the Knudsen number was varied from 0.005 to 0.1. Both near-adiabatic and cold wall conditions were considered.

**Résumé :** Ce travail met en évidence l'influence de la raréfaction sur l'écoulement supersonique et à basse densité autour d'un disque circulaire. Des résultats numériques ont été obtenus en utilisant deux approches continues, à savoir les équations de Navier-Stokes (NS) et les équations quasi gazodynamiques (QGD). Ces résultats ont été comparés avec ceux obtenus par une simulation directe de Monte Carlo (DSMC) qui peut être considérée comme une référence. L'écoulement libre était caractérisé par un nombre de Mach variant de 2 à 20 et un nombre de Knudsen variant de 0,005 à 0,1. On a considéré des conditions de paroi quasi adiabatique et de paroi froide.

## Raréfaction

Le phénomène de raréfaction consiste en l'existence d'un important déséquilibre translationnel local dans le gaz, dû au fait que les molécules n'ont pas suffisamment de collisions entre elles. La fonction de distribution  $f$  des vitesses s'éloigne alors fortement de la forme Maxwellienne et les approches de type *milieu continu* ne sont plus valables. On peut le discuter en considérant l'échelle de longueur locale des gradients de l'écoulement  $L = |Q / \nabla Q|$  (où  $Q$  est une grandeur macroscopique de l'écoulement). L'équilibre n'est assuré que si  $L$  est très supérieur à la distance moyenne parcourue par les molécules entre leurs collisions successives.

Dans un écoulement subsonique, la vitesse moléculaire est essentiellement la vitesse thermique, d'orientation et de module aléatoires et cette distance est égale au libre parcours moyen  $\lambda$ . On définit un paramètre de raréfaction local (nombre de Knudsen

local) par  $P_1 = \frac{\lambda}{L} = \lambda \times \left| \frac{\nabla Q}{Q} \right|$ . On a pu montrer que

dans un écoulement de Couette subsonique, le frottement de paroi s'éloignait de sa valeur continue lorsque  $P_1$  excédait  $P_1 \approx 0,03$ ,  $Q$  représentant alors la vitesse.

Dans un écoulement supersonique, la vitesse moléculaire est essentiellement la vitesse  $U$  de l'écoulement (vitesse orientée) et cette distance est égale à  $U / \nu$  où  $\nu$  est la fréquence de collision, qui

se relie à  $\lambda$  par  $\lambda = \frac{\langle \xi \rangle}{\nu} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} \times \frac{1}{\nu}$  où  $\langle \xi \rangle$

désigne la vitesse thermique moyenne,  $T$  la température et  $R$  la constante massique des gaz parfaits. Le gradient doit être projeté sur la direction de l'écoulement. On appelle  $\theta$  l'angle entre la direction de l'écoulement et la direction du gradient. Le paramètre de raréfaction local est défini par

$$P_2 = \frac{1}{\nu} \times \left| \frac{\vec{U} \cdot \nabla Q}{Q} \right| = Ma \sqrt{\frac{\gamma \pi}{8}} \frac{\lambda}{L} \cos \theta,$$

paramètre qui a été introduit pour la première fois par Bird pour étudier les détentes dans des jets. Bird a trouvé une violation de l'équilibre translationnel lorsque  $P_2$  excédait  $P_2 \approx 0,02$ ,  $Q$  représentant alors la densité.

Si l'on introduit le paramètre

$$P = \max(P_1, P_2) \approx \lambda \times \left| \frac{\nabla Q}{Q} \right| \times \max(1, Ma \cos \theta),$$

on peut prévoir que l'approche continue sera inadéquate dans les régions d'un écoulement où  $P > 0,02 - 0,03$ .

Pour le problème d'un corps placé dans un écoulement uniforme, il est habituel de considérer le libre parcours moyen  $\lambda_\infty$  dans l'écoulement libre et une dimension  $L$  caractéristique du corps supposée donner l'échelle de longueur des gradients. Les considérations qui précèdent suggèrent de retenir comme paramètre de raréfaction global une quantité construite comme  $P$ , à savoir

- en écoulement subsonique : le nombre de Knudsen habituel  $Kn_\infty = \lambda_\infty / L$

- en écoulement supersonique : le produit  $Ma_\infty \lambda_\infty / L = Ma_\infty Kn_\infty \approx Ma_\infty^2 / Re_\infty$ , où apparaît le nombre de Reynolds et qui n'est autre que le carré d'un paramètre de raréfaction connu  $\bar{V} = Ma_\infty / \sqrt{Re_\infty}$ .

Ainsi, l'interprétation que nous avons donnée du paramètre de raréfaction englobe des notions introduites précédemment de manière indépendante :  $Kn_\infty, \bar{V}$  et le paramètre de Bird  $P_2$ .

### Equations QGD

Les équations macroscopiques qui régissent le mouvement d'un gaz s'obtiennent en intégrant l'équation de Boltzmann [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\bar{\xi} \cdot \nabla) f = I$$

après l'avoir multipliée par les invariants collisionnels  $1, \bar{\xi}$  et  $\bar{\xi}^2 / 2$ . Le membre de droite  $I$  est l'intégrale de collision,  $t$  le temps et  $\bar{\xi}$  le vecteur vitesse moléculaire. En prenant  $f = f_0$ , fonction de distribution d'équilibre (maxwellienne), on arrive aux équations d'Euler. En faisant un développement limité de  $f$  au voisinage de  $f_0$  par la procédure de Chapman-Enskog, on arrive aux équations de Navier-Stokes. Les équations dites quasi gazodynamiques (QGD) ont été développées à l'Institut de Modélisation Mathématique de Moscou. Elles sont obtenues en remplaçant  $f$  par le développement  $f = f_0 - \tau(\bar{\xi} \cdot \nabla) f_0$  dans le terme convectif.  $\tau$  est un temps local, caractéristique de la relaxation translationnelle, du même ordre de grandeur que le temps moyen entre collisions d'une molécule [2]. Le développement utilisé pour  $f$  fait apparaître la limite de validité des équations QGD, à savoir  $\tau \bar{\xi} \cdot \nabla f_0 / f_0 \ll 1$ . On retrouve une forme de la condition de validité des équations continues, à savoir que la variation relative de  $f_0$  doit rester faible sur la distance  $\tau \bar{\xi}$  parcourue par une molécule entre deux collisions successives.

L'équation de Boltzmann prend alors une forme approchée

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\bar{\xi} \cdot \nabla) f_0 - (\bar{\xi} \cdot \nabla) \tau (\bar{\xi} \cdot \nabla) f_0 = I$$

que l'on intègre après multiplication par les invariants collisionnels pour obtenir les équations QGD [3,4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i \rho u^i = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^k + \nabla_i \rho u^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i \tau (\nabla_j \rho u^i u^j u^k + \nabla^i p u^k + \nabla^k p u^i) + \nabla^k \tau \nabla_i p u^i$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_i u^i (E + p) = \nabla_i \tau (\nabla_j (E + 2p) u^i u^j +$$

$$\frac{1}{2} \nabla^i u_k u^k p) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla_i \tau \frac{p}{\rho} \nabla^i p + \frac{\gamma Pr^{-1}}{\gamma - 1} \nabla_i \tau p \nabla^i \frac{p}{\rho}$$

$\rho$  désigne la masse volumique,  $\bar{u}$  la vitesse macroscopique,  $p$  la pression,  $E$  l'énergie volumique

$$\text{totale } E = \rho \frac{u^i u_i}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}.$$

Les équations QGD ont été obtenues pour un gaz monoatomique ( $\gamma = 5/3$ ) et le rapport des chaleurs massiques  $\gamma$  a été introduit dans un but de généralisation. Comme pour les équations NS obtenues par l'approximation BGK, le nombre de Prandtl  $Pr$  est égal à 1. On l'a introduit artificiellement pour être cohérent avec l'expression de Fourier du flux de chaleur lorsque  $Pr \neq 1$ . Pour des écoulements stationnaires, on peut montrer que si l'on prend  $\tau = \mu / p$ , les termes dissipatifs des équations QGD diffèrent des termes dissipatifs des équations NS d'une quantité  $O(\tau^2)$  (ou  $O(Kn^2)$  en variables adimensionnelles). Puisque les termes d'ordre supérieur à  $O(Kn)$  sont négligés dans les équations NS, on peut considérer que les équations NS et QGD sont équivalentes dans le cas limite des faibles nombres de Knudsen.

Toutefois les équations QGD contiennent des dérivées d'espace d'ordre supérieur et requièrent une condition aux limites supplémentaire. A la paroi des obstacles, on la prend sous la forme d'un gradient de pression nul normalement à la frontière :  $\partial p / \partial n = 0$ .

### Configuration géométrique et conditions de l'écoulement

Le problème considéré dans ce travail est l'écoulement autour d'un disque plan infiniment mince de rayon  $R_0$  placé perpendiculairement à la direction de l'écoulement libre de vitesse  $U_\infty$  (Fig.1). Une étude systématique a été réalisée en faisant varier le nombre de Mach  $Ma_\infty$  de 2 à 20 et en fixant la température de paroi  $T_w$  égale à la température d'arrêt  $T_0$  de l'écoulement libre (conditions quasi adiabatiques). Le nombre de Knudsen  $Kn_\infty = \lambda_\infty / (2R_0)$  a été pris égal successivement à 0,1, 0,01 et 0,005. Pour  $Kn_\infty = 0,1$ , on a également

considéré la condition  $T_w = T_0 / 2$ . A titre d'exemple, le degré de raréfaction correspondant à  $Ma_\infty = 20$  et  $Kn_\infty = 0,1$  est approximativement celui d'un corps de 2 mètres de diamètre rentrant dans l'atmosphère, à une altitude de 100 km. On notera toutefois que les hypothèses  $T_w = T_0$  et même  $T_w = T_0 / 2$  conduisent à des températures de paroi beaucoup plus élevées que dans une rentrée atmosphérique réelle ( $T_w/T_\infty = 134$  ou  $67$ ).

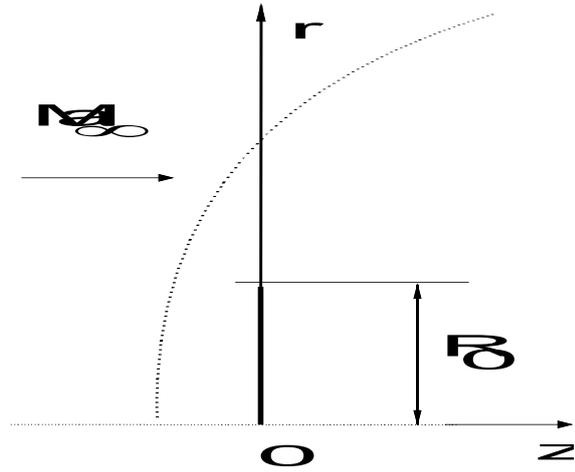


Fig.1 : Configuration géométrique.

Le gaz en écoulement est supposé monoatomique ( $\gamma = 5/3$ ) et caractérisé par une loi de viscosité du type  $\mu \propto T^{1/2}$ . D'un point de vue microscopique, il s'agit donc d'un gaz de molécules "sphères rigides" de masse  $m$  dont le diamètre  $d$  se relie à la viscosité par  $\mu = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{RT}{\pi}} \frac{m}{d^2}$ . Le libre parcours moyen est égal à  $\lambda = \frac{16\mu}{5\rho\sqrt{2\pi RT}}$ . La fréquence de collision

moléculaire est égale à  $\nu = \frac{5p}{4\mu}$  et le temps caractéristique  $\tau = \mu/p$  qui intervient dans les équations QGD est donc égal à  $(5/4)\tau_c$  où  $\tau_c$  est le temps moyen entre collisions  $\tau_c = 1/\nu$ . Les nombres de Mach, de Knudsen et de Reynolds sont

liés par la relation  $Kn_\infty = \frac{Ma_\infty}{Re_\infty} \times \frac{16}{5} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}$ .

On a veillé à la cohérence entre les modèles moléculaires et macroscopiques utilisés respectivement dans le calcul DSMC et dans les approches continues.

La table 1 donne quelques caractéristiques des cas étudiés pour  $Kn_\infty = 0.1$ . Il est facile d'en déduire les caractéristiques pour les autres valeurs de  $Kn_\infty$ .

$Ma_\infty$	2	5	10	20
$Re_\infty$	32,96	82,4	164,81	329,6
Pour $T_w = T_0$				
$Re_w = \frac{2\rho_\infty U_\infty R}{\mu(T_w)}$	21,58	26,97	28,13	28,44
$T_w/T_\infty$	2,333	9,333	34,33	134,3
Pour $T_w = T_0/2$				
$Re_w = \frac{2\rho_\infty U_\infty R}{\mu(T_w)}$	30,52	31,15	39,78	40,22
$T_w/T_\infty$	1,167	4,667	17,16	67,15

Table 1: Paramètres de l'écoulement pour  $Kn_\infty=0,1$ .

### Calcul numérique

Le problème a été résolu par deux approches continues, à savoir les équations QGD et NS et par une approche moléculaire, à savoir la simulation directe par méthode de Monte Carlo (DSMC).

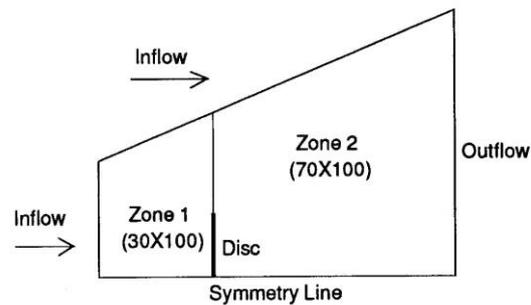


Fig.2 : Domaine de calcul pour les équations NS.

NS. Le code commercial INCA a été utilisé pour résoudre les équations NS. Les équations ont été complétées par des conditions aux limites de glissement de vitesse et de saut de température

$$u_s = \left( \frac{\sqrt{\pi} \mu}{\rho \sqrt{2RT}} \frac{\partial u_t}{\partial n} \right)_s \quad T_s - T_w = \frac{\sqrt{\pi}}{2R} \left( \frac{1}{\sqrt{2RT}} \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s$$

L'indice  $s$  se rapporte au gaz,  $n$  est la distance normale à la paroi,  $u_t$  la vitesse tangentielle et  $\kappa$  la

conductivité thermique. En pratique ce code utilise des grandeurs dimensionnées. Le domaine de calcul (Fig.2) est divisé en deux zones contenant respectivement (30 x 100) et (70 x 100) nœuds. Dans les deux zones, la taille des cellules diminue quand on s'approche du disque dans la direction  $z$ . Par ailleurs, dans la direction  $r$ , la taille des cellules diminue du centre vers le bord du disque puis augmente jusqu'à la frontière extérieure. Cette grille est très semblable à celle qui sera utilisée pour la DSMC (Fig.3). Les conditions de l'écoulement libre sont imposées sur les frontières amont et latérales. Les conditions de sortie en aval sont extrapolées. L'insensibilité des résultats au raffinement du maillage a été vérifiée pour  $Ma_\infty = 20$ ,  $Kn_\infty = 0.1$  et  $T_w = T_0 / 2$ .

**QGD.** Les équations QGD ont été écrites en coordonnées cylindriques  $(r,z)$ , et complétées par les mêmes conditions aux limites de glissement de vitesse et de saut de température. Elles ont été résolues en variables adimensionnelles. Le domaine de calcul (Fig.3) est couvert par une grille rectangulaire non uniforme de  $(N_z \times N_r)$  nœuds qui présente un resserrement en  $r$  près du bord du disque et près de l'axe et un resserrement en  $z$  près du plan du disque. L'axe de symétrie et le plan du disque sont placés entre les nœuds. On utilise un schéma aux différences finies. Les dérivées spatiales sont approximées avec une précision du second ordre (schéma centré). Les paramètres de l'écoulement sont calculés aux nœuds de la grille. Les dérivées temporelles sont approximées au premier ordre. Les conditions de l'écoulement libre sont utilisées comme conditions initiales et sur la frontière amont. Des conditions de symétrie sont imposées sur l'axe. Les dérivées sont supposées nulles sur les autres frontières.

Au cours de la résolution, des oscillations sont apparues pour les grands nombres de Mach dans les zones de gradient intense. On a alors remplacé  $\tau$  par  $\tau + \tau'$ , avec  $\tau' = \beta \delta / a$ . Ici,  $a$  est la vitesse du son,  $\delta$  le pas en espace et  $\beta$  la plus petite valeur qui assure la stabilité. Cette correction est similaire à l'introduction d'une viscosité artificielle [5]. Néanmoins, pour un même schéma numérique, les équations QGD s'avèrent plus stables que les équations NS.

Pour résoudre les équations aux différences finies, on utilise un algorithme explicite. La solution stationnaire est obtenue comme la limite d'un processus évoluant dans le temps. Le pas de temps est choisi d'après la condition de stabilité de Courant

$\Delta t = \alpha \min(\delta/V)$  avec  $V = a + \sqrt{u_r^2 + u_z^2}$ . Le coefficient  $\alpha$  est choisi empiriquement et varie de 0.005 à 0.02. Le calcul s'arrête quand la solution stationnaire est atteinte suivant le critère

$$\frac{1}{N_r N_z} \sum \left| \frac{\rho^{j+1} - \rho^j}{\rho^j \Delta t} \right| \leq 10^{-5}, \text{ où } j \text{ est l'indice du pas de temps [6].}$$

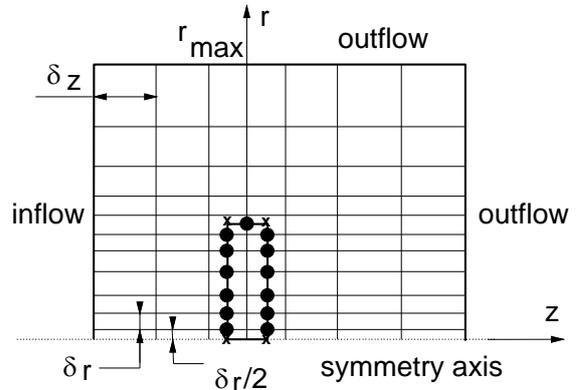


Fig.3: Schéma du maillage pour les équations QGD.

$Ma_\infty$	2	5	10	20
$(\delta/R_0)$				
min	0,04	0,04	0,04	0,04
max	0,32	0,32	0,32	0,32
$\alpha$ pour				
$Kn_\infty =$				
0,1	0,02	0,01		0,005
0,01	0,05	0,03	0,015	0,005
0,005	0,05	0,03		0,005
$\beta$ pour				
$Kn_\infty =$				
0,1	0	0		0,1
0,01	0,001	0,05	0,1	0,2
0,005	0,1	0,25		0,5
$\delta t a_\infty / \lambda_\infty$				
$Kn_\infty =$				
0,1	0,0012	0,00031		0,000041
0,01	0,031	0,0092	0,0024	0,00040
0,005	0,062	0,018		0,00081
$N_z \times N_r$				
$Kn_\infty =$				
0,1	78 x 74	78 x 74		78 x 74
0,01	67 x 63	67 x 63	67 x 63	67 x 63
0,005	67 x 63	67 x 63		67 x 63
Nombre d'itérations pour $T_w = T_0$				
$Kn_\infty =$				
0,1	74800	111200		278700
0,01	41000	36200	73700	240100
0,005	42600	68900		269700
Nombre d'itérations pour $T_w = T_0 / 2$ et $Kn_\infty = 0,1$				
	75000	116100		311200

Table 2 : Caractéristiques des calculs QGD.

L'insensibilité des résultats au raffinement du maillage a été vérifiée pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0.1$  et  $T_w = T_0$  et pour  $Ma_\infty = 2$ ,  $Kn_\infty = 0.01$  et  $T_w = T_0$ .

La table 2 donne quelques caractéristiques des calculs QGD.

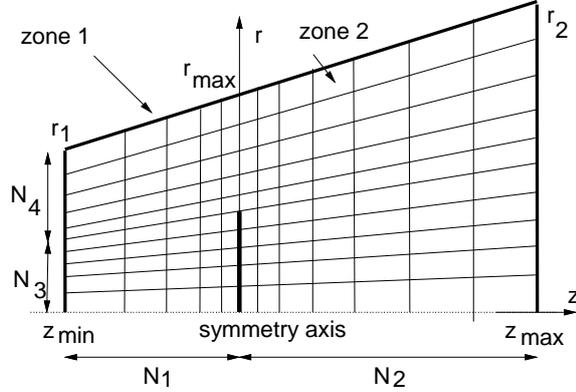


Fig.4 : Schéma du maillage pour les calculs DSMC.

**DSMC.** La simulation numérique directe par méthode Monte Carlo (DSMC) consiste en une expérience numérique dans laquelle on suit l'évolution en coordonnées et en vitesse d'un nombre limité de molécules (de 50000 à 100000 pour le présent problème), considérées comme un échantillon représentatif des molécules réelles. Le code utilisé ici (DISIRAF : DIrect SIMulation of RArefied Flows) a été développé au laboratoire d'Aérodynamique.

L'espace est divisé en cellules, suffisamment petites pour que les paramètres macroscopiques y soit considérés comme uniformes (figure 4). Cette condition implique que la dimension d'une cellule dans une direction  $\vec{x}$  donnée soit telle que  $|\langle \vec{\delta x} \cdot \nabla Q \rangle / Q| \ll 1$  où  $Q$  est le paramètre de l'écoulement qui change le plus rapidement.

Tous les résultats DSMC présentés ont été obtenus avec des maillages tels que  $z_{\min} = -2,6 R_0$ ,  $z_{\max} = 6,4 R_0$ ,  $N_1 = 30$ ,  $N_2 = 45$ ,  $N_3 = 30$ ,  $N_4 = 35$ , soit au total 4875 cellules dont la dimension variait de  $0,032 R_0$  à  $0,342 R_0$  en  $z$  et de  $0,034 R_0$  à  $0,252 R_0$  en  $r$ . La table 3 donne quelques caractéristiques du calcul.

Seul le cas  $Kn_\infty = 0.1$  a été traité.

Le temps est discrétisé en intervalles  $\delta t$ . Chaque pas de temps consiste en une phase de déplacement des molécules en fonction de leur vitesse individuelle, suivie d'une phase de collisions intermoléculaires. L'algorithme est conçu pour assurer à chaque molécule suivie des déplacements, une fréquence de collision et des partenaires de collision représentatifs de ceux d'une molécule dans l'écoulement réel. Le pas de temps doit être suffisamment petit pour que

les paramètres macroscopiques soient considérés comme uniformes sur la distance parcourue par une molécule pendant  $\delta t$ , soit  $v \delta t \ll 1$  en régime subsonique et  $\delta t |(\vec{u} \cdot \nabla Q) / Q| \ll 1$  en supersonique. La dernière condition peut être approximée par  $U_\infty \delta t / R \ll 1$  si l'on considère  $R$  comme l'échelle de longueur des gradients.

Chaque molécule est affectée d'une pondération qui représente au nombre de molécules réelles qui lui est associé. Cette pondération est ajustée pour que le nombre  $N_c$  de molécules simulées présentes dans chaque cellule soit relativement uniforme (de 5 à 40) malgré les variations considérables de la concentration moléculaire dans l'écoulement réel. Les molécules sont injectées à travers la frontière amont et les frontières latérales avec des fonctions de distribution qui correspondent à l'écoulement libre. Le flux moléculaire entrant à travers la frontière aval est négligé en raison du caractère supersonique de l'écoulement. La paroi du disque est considérée comme une surface à réflexion diffuse avec accommodation parfaite.

$Ma_\infty$	2	5	20
Pour $T_w = T_0$			
$(v \delta t) \max$	0,8	0,46	0,96
$U_\infty \delta t / R$	0,062	0,03	0,062
Nbe de collisions (millions)	15	9,7	9
$N_c$ (min/max)	5/19	6/26	
Pour $T_w = T_0 / 2$			
$v \delta t \max$	0,95	0,9	0,64
$U_\infty \delta t / R$	0,056	0,046	0,0306
Nbe de collisions (millions)	40	12,3	17,4
$N_c$ (min/max)	9/11	5/22	5/38

Table 3 : Caractéristiques des calculs DSMC

( $Kn_\infty=0.1$ ).

On effectue d'abord un calcul préliminaire avec une pondération des molécules ajustée sur une densité uniforme (celle de l'écoulement libre). On utilise la distribution de densité qui résulte de ce calcul pour faire un meilleur ajustement de la pondération avant de lancer le calcul final. Une partie du temps de calcul est utilisée pour passer du champ d'écoulement initial arbitraire à un champ d'écoulement stationnaire d'un point de vue macroscopique. On poursuit alors le calcul pour pouvoir observer une succession d'états

microscopiques représentatifs du même état macroscopique. Les informations recueillies au cours de ces observations permettent, par un traitement statistique, de déterminer les paramètres de l'écoulement (concentration moléculaire, températures, vitesses). Au total, on calcule quelques millions de collisions.

Une première série de calculs a été effectuée pour vérifier que les résultats étaient indépendants de la discrétisation temporelle, de la discrétisation spatiale et de la position de la frontière aval. Puis on a procédé aux calculs définitifs. La table 3 en donne quelques caractéristiques.

### Résultats et discussion

Dans la comparaison des résultats obtenus par les méthodes DSMC, QGD et NS, on peut considérer les résultats DSMC comme une référence, car ils ont été obtenus en respectant les critères de validité relatifs à la discrétisation et à l'algorithme de traitement des collisions. Dans ce cas, en effet, pour une même modélisation physique du gaz, la DSMC repose sur des hypothèses moins restrictives que les méthodes continues, puisqu'elle ne suppose pas l'équilibre thermodynamique local. Les résultats DSMC sont entachés de fluctuations statistiques, qui pourraient être réduites en augmentant la durée du calcul.

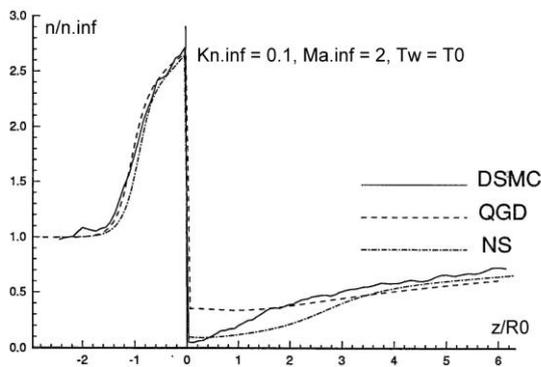


Fig.5 : Distribution axiale de la concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 2, Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

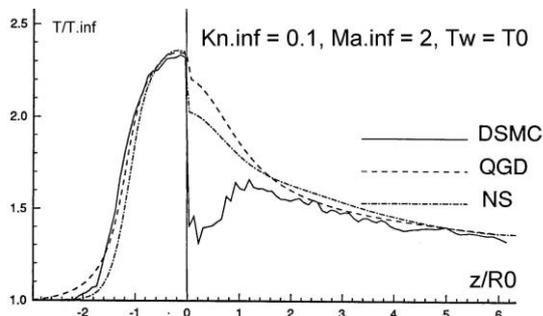


Fig.6 : Distribution axiale de la température réduite pour  $Ma_\infty = 2, Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

### Champ d'écoulement

Les distributions de concentration moléculaire  $n$  et de température  $T$  le long de l'axe de symétrie,  $y$  compris dans le proche sillage, sont présentées respectivement sur les figures 5 et 6 pour un écoulement à  $Ma_\infty = 2, Kn_\infty = 0.1$  et  $T_w = T_0$ . Les différences essentielles entre les résultats sont observées dans le proche sillage, où les approches continues peuvent conduire à des densités et températures beaucoup plus élevées.

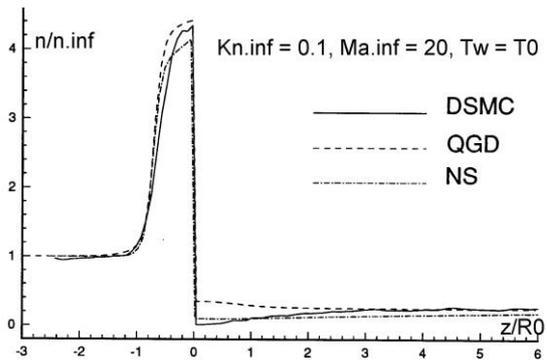


Fig. 7 : Distribution axiale de la concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 20, Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

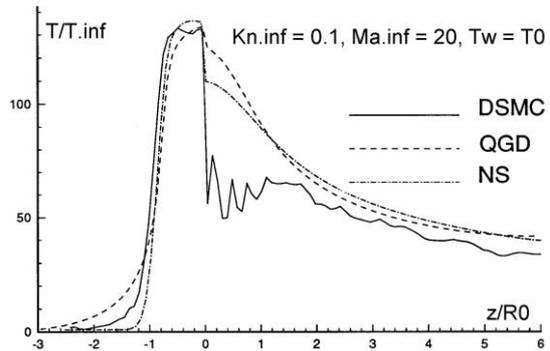


Fig. 8 : Distribution axiale de la température réduite pour  $Ma_\infty = 20, Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

Pour des nombres de Mach  $Ma_\infty$  plus élevés, on s'attend à un déséquilibre plus fort car celui-ci est régi par le paramètre de raréfaction  $Ma_\infty \times Kn_\infty$ . On constate effectivement que l'écart entre les résultats obtenus par les différentes méthodes se prolonge plus loin vers l'aval (figures 7 et 8 pour  $Ma_\infty = 20$ ). D'après les figures 9 à 12, on tire les mêmes conclusions dans le cas de la paroi froide ( $T_w = T_0/2$ ).

Dans la zone de proche sillage, le libre parcours moyen local est très grand (de l'ordre de 10 à 100 fois  $\lambda_\infty$  car la densité  $y$  est 10 à 100 fois plus faible que dans l'écoulement libre). Il est donc de l'ordre de

2 à 20 fois  $R_0$ , ce qui est grand devant l'échelle de longueur des gradients, elle-même de l'ordre de  $R_0$ . Il était donc prévisible que les approches continues soient en défaut. L'utilisation de conditions aux limites de glissement dans les approches continues n'a pas pour effet de rendre celles-ci valables dans la couche de Knudsen, mais vise à minimiser les effets du déséquilibre à la paroi sur le reste de l'écoulement. Effectivement, dans le sillage lointain, les résultats des trois calculs tendent à coïncider. Les résultats QGD tendent plus vite que les résultats NS vers les résultats DSMC.

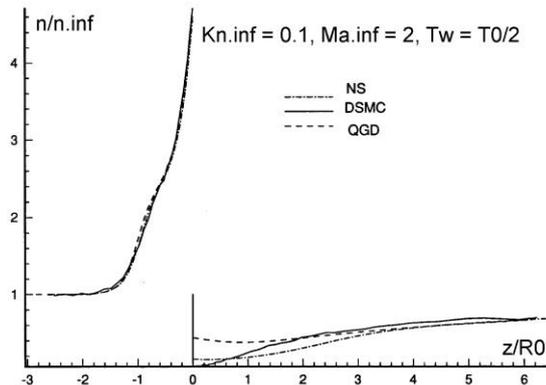


Fig. 9 : Distribution axiale de la concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 2$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0/2$ .

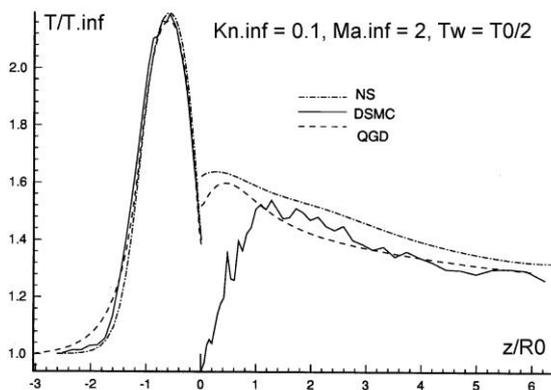


Fig.10 : Distribution axiale de la température réduite pour  $Ma_\infty = 2$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0/2$ .

Pour illustrer cette notion de déséquilibre on a représenté sur la figure 13 la distribution axiale des deux paramètres de raréfaction locaux  $P_1$  et  $P_2$ , calculés d'après le champ d'écoulement QGD pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ . On voit bien que  $P_1 < P_2$  dans les régions supersoniques (en amont du choc et dans le sillage lointain), et que  $P_1 > P_2$  dans les régions subsoniques (derrière le choc et dans le sillage proche). Le critère de validité des

approches continues (c'est-à-dire  $\max(P_1, P_2) < 0,02 - 0,03$ ) n'est pas vérifié.

Des calculs QGD et NS ont été également effectués dans le cas quasi adiabatique pour des nombres de Knudsen plus faibles ( $Kn_\infty = 0,01$  et  $0,005$ ), c.-à-d. des écoulements moins raréfiés. On constate alors (Figs. 14-18) que les résultats QGD et NS tendent à coïncider.

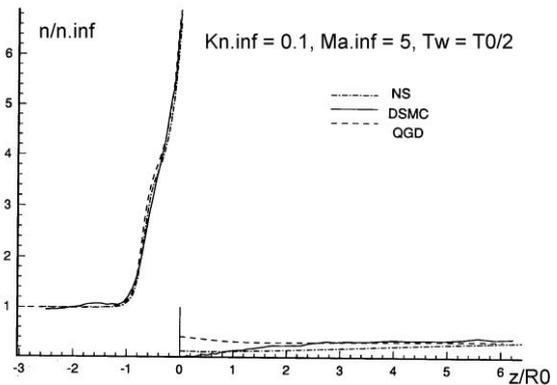


Fig.11 : Distribution axiale de la concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0/2$ .

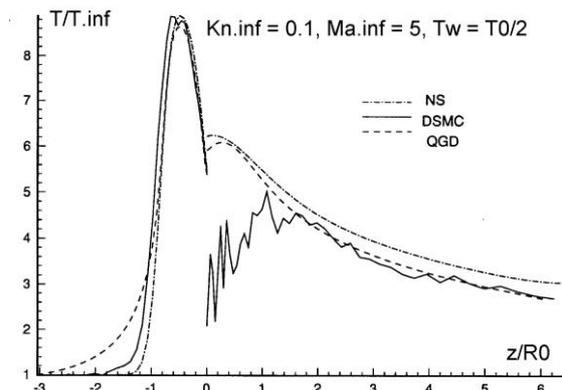


Fig.12 : Distribution axiale de la température réduite pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0/2$ .

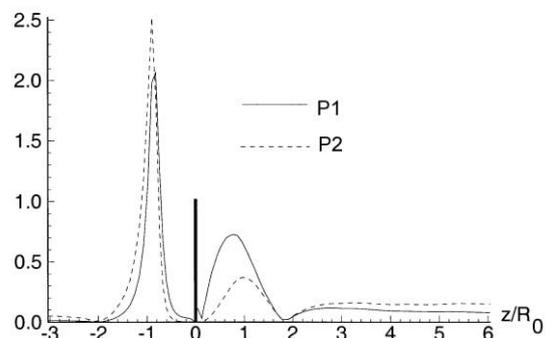


Fig.13 : Distribution axiale des paramètres de raréfaction  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$ ,  $T_w = T_0$ .

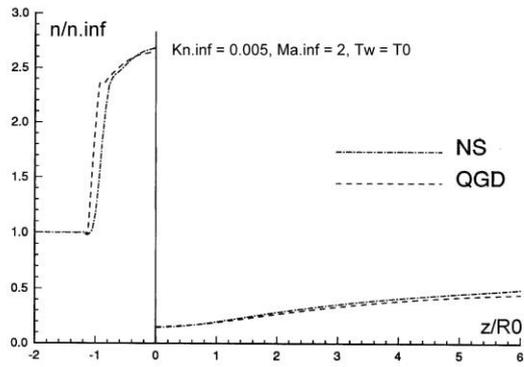


Fig.14 : Distribution axiale de la concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 2$ ,  $Kn_\infty = 0,005$  et  $T_w = T_0$ .

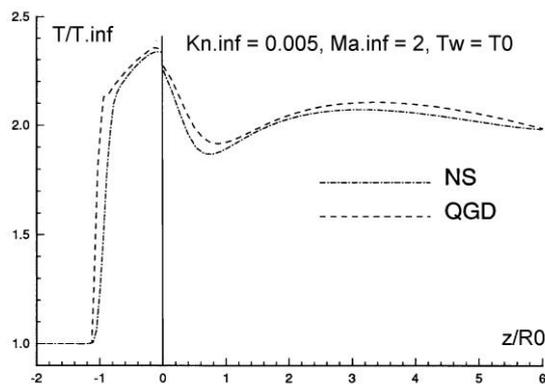


Fig.15 : Distribution axiale de la température réduite pour  $Ma_\infty = 2$ ,  $Kn_\infty = 0,005$  et  $T_w = T_0$ .

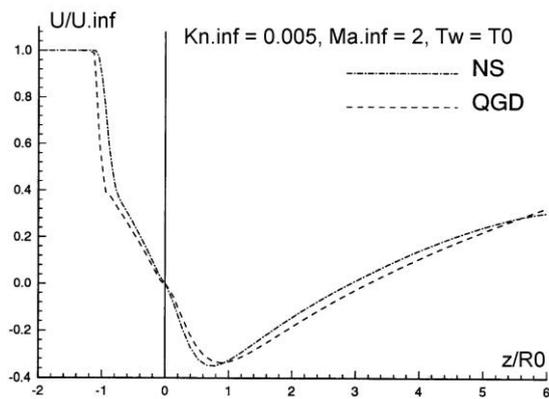


Fig.16 : Distribution axiale de la vitesse réduite pour  $Ma_\infty = 2$ ,  $Kn_\infty = 0,005$  et  $T_w = T_0$ .

Pour le cas le moins raréfié ( $Kn_\infty = 0,005$ ), on trouve une vitesse axiale négative dans le proche sillage, c.-à-d. l'existence d'un vortex. Ce vortex n'apparaît pas dans les autres conditions.

Bien entendu, les trois méthodes considérées ici donnent accès à la distribution de tous les paramètres de l'écoulement dans un plan méridien ( $r$ ,  $z$ ). On en voit un exemple sur les figures 19 à 21. Sur ces figures, la partie supérieure représente les champs DSMC et NS. La partie inférieure représente les champs DSMC et QGD. Les isolignes DSMC sont les lignes symétriques et irrégulières.

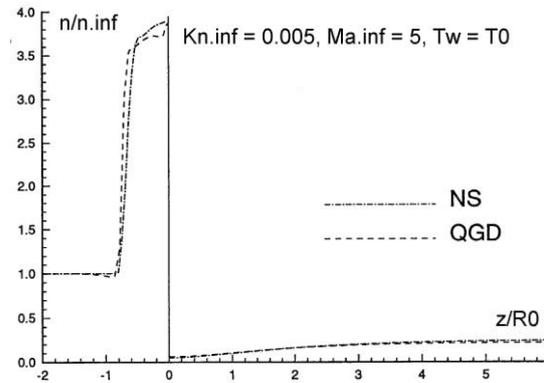


Fig.17 : Distribution axiale de la concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,005$  et  $T_w = T_0$ .

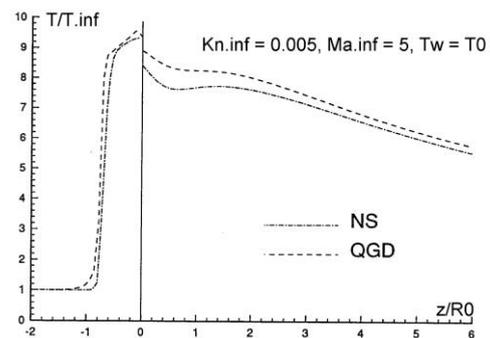


Fig.18 : Distribution axiale de la température réduite pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,005$  et  $T_w = T_0$ .

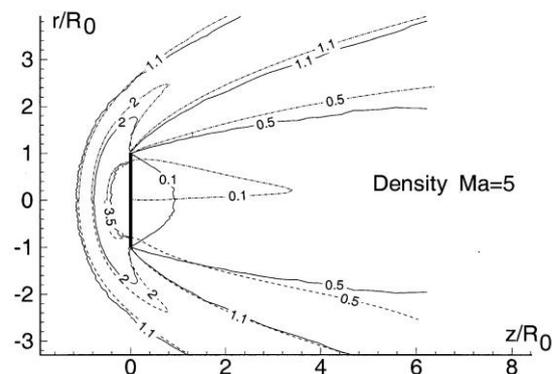


Fig. 19 : Champ de concentration moléculaire réduite pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

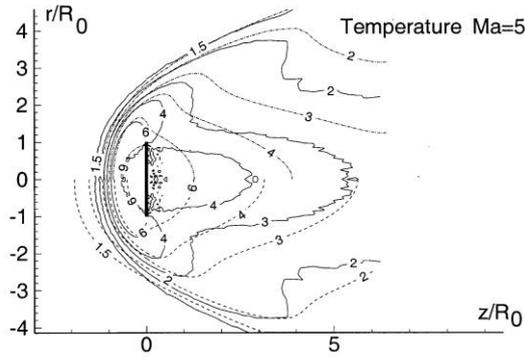


Fig. 20 : Champ de température réduite pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

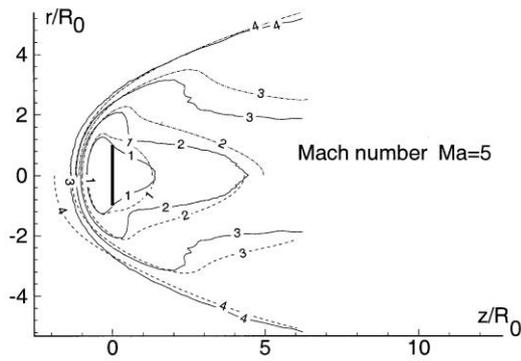


Fig. 21 : Champ de nombre de Mach pour  $Ma_\infty = 5$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

### Grandeurs de paroi

Les trois méthodes donnent aussi accès aux grandeurs de paroi : pression, contrainte de frottement ( $F_t$ ) et flux thermique. La DSMC fait une distinction entre

- la contrainte normale  $F_n$ , qui ne fait intervenir que la composante normale de la vitesse moléculaire et qui se traduit par une force effectivement appliquée à la paroi, et
- la pression thermodynamique  $p$ , qui fait intervenir les trois composantes de la vitesse thermique, qui se relie à la température de translation.

Ces deux notions ne se confondent que dans un gaz en équilibre, parce que la fonction de distribution des vitesses  $y$  est isotrope.

On voit un exemple de résultats sur la figure 22. Sur la face avant, les pressions ou forces normales données par les trois méthodes (rapportées à  $p_\infty$ ) sont assez voisines, mais le coefficient de frottement  $C_f / 2 = F_t / (\rho_\infty U_\infty^2)$  résultant du calcul QGD est plus proche de la référence DSMC que celui qui résulte du calcul NS.

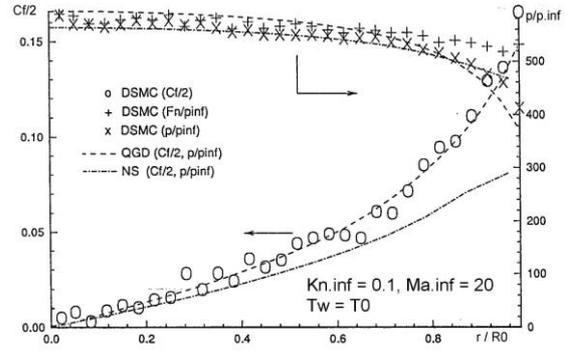


Fig.22 : Distribution de la pression et des contraintes normale et tangentielle sur la face avant pour  $Ma_\infty = 20$ ,  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

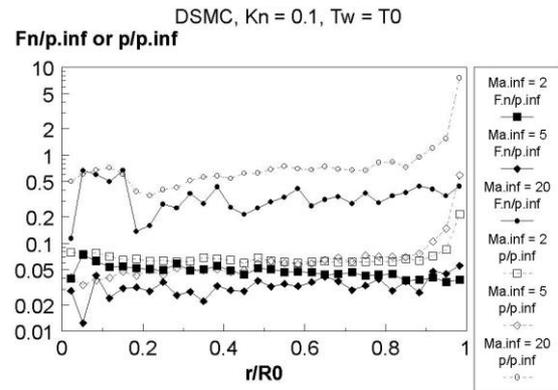


Fig.23 : Distribution de la pression et de la contrainte normale sur la face arrière pour  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0$ .

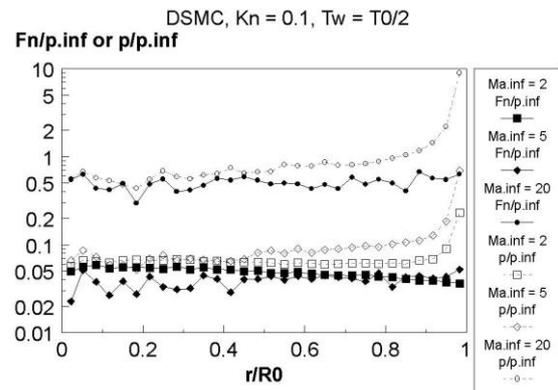


Fig.24 : Distribution de la pression et de la contrainte normale sur la face arrière pour  $Kn_\infty = 0,1$  et  $T_w = T_0 / 2$ .

Sur les figures 23 et 24, on a représenté la répartition des contraintes normales et des pressions sur la face arrière, calculée par DSMC, respectivement pour  $T_w = T_0$  et  $T_w = T_0 / 2$ . On voit que  $p$  est supérieur à  $F_n$ . La pression de culot est très faible à Mach 2 et 5 (inférieure au dixième de la pression à l'infini  $p_\infty$ ). A

Mach 20, elle peut atteindre  $p_\infty$ , cette valeur étant sans doute affectée par la température très élevée de la paroi ( $T_w/T_\infty = 134$  ou 67), ce qui entraîne une quantité de mouvement normale très importante pour les molécules ré-émises par la paroi.

### Conclusion

On a rappelé les conditions de validité d'une approche continue des écoulements. On a présenté un système d'équations dites quasi gazodynamiques (QGD) qui diffèrent des équations de Navier-Stokes (NS) par des termes en  $Kn^2$ ,  $Kn$  étant le nombre de Knudsen. Pour un même schéma numérique, les équations QGD s'avèrent plus stables que les équations NS.

On a étudié numériquement l'écoulement autour d'un disque placé perpendiculairement à un écoulement supersonique raréfié. Les solutions obtenues en résolvant les équations de Navier-Stokes (NS) et les équations quasi gazodynamiques (QGD) ont été comparées aux solutions d'une simulation numérique par méthode de Monte Carlo (DSMC) que l'on pouvait considérer comme une référence.

Les conditions considérées correspondaient à un déséquilibre important dans la zone de proche sillage et les deux méthodes continues (QGD et NS) ont confirmé leur inadéquation à ce régime. Toutefois vers le sillage lointain, l'équilibre thermodynamique se rétablit et les résultats QGD et NS se rapprochent tous deux des résultats DSMC.

Dans les conditions de faible déséquilibre, les équations QGD semblent donner des résultats plus proches des résultats DSMC que les équations NS.

Aux faibles nombres de Knudsen ( $Kn_\infty = 0,005$ ), les résultats QGD et les résultats NS tendent à se confondre.

Pour un nombre de Knudsen de 0,1, on a obtenu la distribution des grandeurs de paroi (pression, contraintes normale et tangentielle et flux thermique) sur les deux faces du disque par la méthode DSMC.

### Références

1. Bird GA : *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
2. Elizarova TG, Lengrand JC, Graur IA : *Gradient expansions for distribution functions and derivation of moment equations*, Proc. of the 21st Rarefied Gas Dynamics Symposium, ed. Brun et al., Vol.1, pp.119-126, 1999.
3. Sheretov YuV : *Quasihydrodynamic equations as a model for viscous compressible heat conductive flows*, in: *Implementation of functional analysis in the theory of approaches*, Tver University, 1997, pp.127-105 (in Russian).
4. Elizarova TG, Chetverushkin BN, Sheretov YuV : *Quasi gas dynamic equations and computer simulation of viscous gas flows*, Lecture Notes in Phys., No 414, pp.421-425, 1992
5. Elizarova TG, Craur IA, Lengrand JC, Chpoun A : *Rarefied gas flow simulation based on quasigasdynamic equations*, AIAA J., V.33. No12, pp.2316-2324, 1995.
6. Lengrand JC, Chpoun A, Graur IA, Elizarova TG : *Supersonic rarefied gas flow around a perpendicular disk*, Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, Meudon (Fr), R 95-6, 1995.