

*Т. Г. Елизарова, И. С. Калачинская, Ю. В. Шеретов,  
Е. В. Шильников*

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЗА ОБРАТНЫМ УСТУПОМ <sup>1</sup>**

Приведены результаты численного моделирования медленных плоских двумерных течений вязкого газа в канале с внезапным расширением. В качестве математической модели использованы квазигидродинамические уравнения в приближении несжимаемой жидкости. Расчеты выполнены в диапазоне чисел Рейнольдса, включающем как ламинарный, так и турбулентный режимы течения. Установлено, что с ростом числа Рейнольдса происходит бифуркация решения, и стационарный ламинарный режим течения сменяется нестационарным. Результаты расчетов соответствуют известным данным. При их проведении для больших чисел Рейнольдса традиционные модели турбулентности не использовались.

### **1. Введение**

Работа посвящена численному моделированию медленных течений вязкого газа за обратным уступом в канале с внезапным расширением. В качестве математической модели используется квазигидродинамическая (КГД) система уравнений [1], [2] в приближении несжимаемой среды. С ростом числа Рейнольдса набегающего потока ламинарный режим течения за уступом сменяется турбулентным. Длина отрывной зоны за уступом  $L_s$  является показательной и чувствительной характеристикой течения. Схема изучаемого течения приведена на рис. 1. Число Рейнольдса вычисляется по формуле  $Re = (U_0 h) / \nu$ , где  $U_0$  – средняя скорость газа во входном сечении канала,  $h$  – высота уступа,  $\nu$  – кинематическая вязкость среды.

При числах  $Re < 1000$  течение является ламинарным. В этом случае  $L_s$  растет почти линейно с увеличением числа Рейнольдса. Аналитическое выражение для длины отрывной зоны двумерных течений приведено, например, в [3]. Ламинарные течения за обратным уступом хорошо моделируются численно и результаты расчетов в двумерной постановке у различных авторов отвечают экспериментальным данным [3]–[6].

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 01-01-00061 и INTAS 2000-0617.

При больших числах Рейнольдса течение становится турбулентным. Для численного моделирования в этом случае, как правило, используются осредненные уравнения Навье–Стокса, дополненные различными моделями турбулентности. В турбулентном режиме длина отрывной зоны, отнесенная к высоте уступа  $L_s/h$ , практически не зависит от числа  $Re$  и варьируется по разным оценкам от 5 до 8 в зависимости от внешних условий. Согласно [5], в эксперименте размер зоны возвратного течения  $L_s/h$  приблизительно равен 8. Расчеты двумерных задач по осредненным уравнениям с различными моделями турбулентности проводились большим числом авторов, что отражено в работах [7]–[11] и библиографиях к ним. В частности, обзор, приведенный в [7], дает диапазон изменения длины зоны отрыва за уступом в пределах 5.2–7.2. Осредненные уравнения ориентированы на получение стационарного численного решения, однако неоднозначность в выборе параметров модели может приводить и к нестандартным картинам течений за уступом [11]. При этом вопрос об области применимости используемой модели турбулентности остается открытым. Нестационарные турбулентные режимы течения удастся получить, используя подход LES [12]. К настоящему времени имеется ряд результатов численного моделирования течений за уступом и в трехмерной постановке [13].

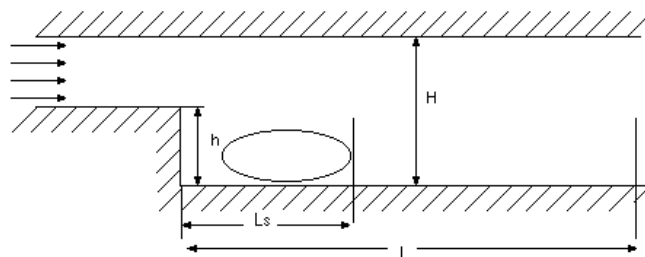


Рис. 1

В данной работе течения за уступом моделируются на основе квазигидродинамической (КГД) системы уравнений, которая была выведена и исследована в [1]–[2]. Способ построения КГД уравнений и их связь с уравнениями Навье–Стокса обсуждаются во втором разделе работы. Аprobация данного подхода для расчета течений несжимаемой жидкости и задач тепловой и теплокапиллярной конвекции проведена в [14]–[16]. Родственные квазигазодинамические уравнения, предложенные Т.Г. Елизаровой и Б.Н. Четверушкиным, успешно использовались для моделирования газодинамических течений [17]–[19].

Расчеты ламинарных течений сравниваются с имеющимися в литературе данными. Расчеты турбулентных режимов сопоставлены с экспериментальными результатами, полученными в лаборатории LME–ESEM [20]–[21]. Эксперименты были выполнены в аэродинамической трубе, мо-

дернизированной для проведения измерений при малых числах Рейнольдса. Визуализация результатов производилась с помощью PIV установки, которая также была доработана для анализа нестационарных режимов.

## 2. Математическая модель

В данном разделе излагаются физические принципы, положенные в основу феноменологического вывода новой квазигидродинамической системы уравнений. Принципиальным и существенным отличием от теории Навье–Стокса является использование процедуры пространственно-временного осреднения для определения основных гидродинамических величин – плотности, скорости и температуры.

### 2.1. Интегральные законы сохранения

В евклидовом пространстве  $R_x^3$  выберем инерциальную декартову систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Пусть  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  – соответствующий ей ортонормированный базис единичных векторов,  $t$  – время. Будем использовать следующие стандартные обозначения для величин, характеризующих течения сжимаемой вязкой теплопроводной среды:  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  – плотность среды,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  – скорость,  $p = p(\vec{x}, t)$  – давление,  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t)$  – удельная внутренняя энергия,  $T = T(\vec{x}, t)$  – температура,  $s = s(\vec{x}, t)$  – удельная энтропия. Предположим, что среда является двухпараметрической, то есть среди пяти термодинамических параметров  $\rho, p, \varepsilon, T, s$  независимы лишь два. При этом заданы уравнения состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad s = s(\rho, T). \quad (1)$$

Пусть  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$  – массовая плотность внешних сил. Например, для жидкости, находящейся в гравитационном поле Земли,  $\vec{F} = \vec{g}$ , где  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения.

В качестве первого постулата примем закон сохранения массы в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0. \quad (2)$$

Считаем, что в каждой точке  $\vec{x}$  области течения в момент времени  $t$  определен вектор  $\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{x}, t)$ , называемый плотностью потока массы. Выделим в области течения ограниченный движущийся материальный объем

$V = V(t)$  с гладкой поверхностью  $\Sigma = \Sigma(t)$ , ориентированной полем внешних единичных нормалей  $\vec{n}$ . Будем считать, что объем  $V(t)$  возникает из объема  $V_0 = V(t_0)$ , где  $t_0$  – начальный момент времени, путем непрерывной деформации, обусловленной перемещением частиц  $V_0$  вдоль траекторий, определяемых векторным полем  $\vec{j}_m / \rho$ . Воспользовавшись известным [22] тождеством Эйлера–Лиувилля

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V \left[ D\varphi + \varphi \operatorname{div}(\vec{j}_m / \rho) \right] dV, \quad (3)$$

в котором  $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$  – некоторое непрерывно дифференцируемое скалярное или векторное поле,  $dV$  – элемент объема в  $R_{\vec{x}}^3$ ,  $D = \partial/\partial t + (\vec{j}_m / \rho) \cdot \vec{\nabla}$  – дифференциальный оператор, представим закон сохранения массы (2) в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (4)$$

Вторым постулатом будет служить закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{u}) dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \mathbf{P}) d\Sigma, \quad (5)$$

где  $d\Sigma$  – элемент площади поверхности  $\Sigma$  около единичного вектора  $\vec{n}$ . Скорость изменения импульса в объеме  $V$  равна сумме приложенных к нему сил. Первый интеграл в правой части (5) есть объемная сила, действующая со стороны внешнего поля; второй определяет силы давления и силы вязкого трения, приложенные к поверхности  $\Sigma$ . Величину  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\vec{x}, t)$  назовем тензором внутренних напряжений. Символ  $(\vec{n} \cdot \mathbf{P})$  обозначает свертку (скалярное произведение) вектора  $\vec{n}$  и тензора второго ранга  $\mathbf{P}$ , осуществляемую по первому индексу тензора  $\mathbf{P}$ . Соответственно, запись  $(\mathbf{P} \cdot \vec{n})$  означает, что свертка  $\mathbf{P}$  и  $\vec{n}$  идет с участием второго индекса  $\mathbf{P}$ . В случае симметричного тензора  $\mathbf{P}$  имеем  $(\vec{n} \cdot \mathbf{P}) = (\mathbf{P} \cdot \vec{n})$ .

Третьим постулатом является закон сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) dV = \int_V (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) dV + \iint_{\Sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \iint_{\Sigma} (\vec{q} \cdot \vec{n}) d\Sigma. \quad (6)$$

Первый интеграл в правой части (6) равен мощности внешних массовых сил, приложенных к объему  $V$ ; второй интерпретируется как мощность

поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения. Последний член в (6) описывает приток энергии в единицу времени через поверхность  $\Sigma$  за счет процессов теплопроводности. Конкретные выражения для векторных полей  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$  и  $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t)$  будут приведены ниже.

Следующий постулат выражает закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt} \int_V [\vec{x} \times (\rho \vec{u})] dV = \int_V [\vec{x} \times \rho \vec{F}] dV + \iint_{\Sigma} [\vec{x} \times (\vec{n} \cdot \mathbf{P})] d\Sigma. \quad (7)$$

Он представлен в классической форме. Внутренние моменты, а также распределенные массы и поверхностные пары не учитываются. Символ  $\times$  используется для обозначения векторного произведения двух векторов.

Второй закон термодинамики, являющийся нашим пятым постулатом, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho s) dV = - \iint_{\Sigma} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T} d\Sigma + \int_V X dV. \quad (8)$$

Поверхностный интеграл в правой части (8) определяет скорость изменения энтропии в объеме  $V$  за счет теплового потока. Он может быть как положительным, так и отрицательным. Последний интеграл всегда неотрицателен и дает производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов.

## 2.2. Переход к дифференциальным уравнениям

Как и при выводе системы Навье–Стокса [22], чтобы перейти от интегральных соотношений (4)–(8) к соответствующим дифференциальным уравнениям, воспользуемся формулой Эйлера–Лиувилля (3) о дифференцировании интеграла, взятого по движущемуся материальному объему. При этом будем считать, что все основные макроскопические параметры среды являются достаточно гладкими функциями пространственных координат и времени. Учитывая произвольность  $V$ , получим дифференциальные уравнения баланса массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_m = 0, \quad (9)$$

импульса

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes \vec{u}) = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (10)$$

полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) + \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \vec{q}, \quad (11)$$

момента импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{x} \times \rho \vec{u}] + \operatorname{div}(\vec{j}_m \otimes [\vec{x} \times \vec{u}]) = [\vec{x} \times \rho \vec{F}] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\vec{x} \times \mathbf{P}_{ij} \vec{e}_j] \quad (12)$$

и энтропии

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}_m s) = -\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) + X. \quad (13)$$

Здесь  $(\vec{j}_m \otimes \vec{u})$  – тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов  $\vec{j}_m$  и  $\vec{u}$ . При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу. В уравнении (12) символом  $\mathbf{P}_{ij}$  обозначен портрет тензора  $\mathbf{P}$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . По дважды повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  идет суммирование.

Система (9)–(13) не является замкнутой. Проблема замыкания может быть решена различными способами. Необходимо представить величины  $\vec{j}_m, \mathbf{P}, \vec{q}, \vec{A}, X$  как функции макроскопических параметров среды и их производных.

### 2.3. Классический способ решения проблемы замыкания. Уравнения Навье–Стокса

Обсудим сначала классический подход [22], в котором для определения гидродинамических величин используется процедура осреднения по некоторому множеству физически бесконечно малых объемов из пространства  $R_{\vec{x}}^3$  в фиксированный момент времени  $t$ . В этом случае вектор плотности потока массы  $\vec{j}_m$  в любой точке  $(\vec{x}, t)$  совпадает со средним импульсом единицы объема  $\rho \vec{u}$ , и первое замыкающее соотношение имеет вид

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u}. \quad (14)$$

Далее вводится представление о силах давления и внутреннего вязкого трения, мгновенно действующих на поверхность материального объема. Закон движения последнего выбирают таким же, как и в механике твердого тела. Это допущение в научной литературе называют принципом отвердевания. Уравнение баланса импульса (12) является следствием закона сохранения импульса (10) при условии симметричности тензора напряжений  $\mathbf{P}$ . В теории ньютоновских сред для  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{NS}$  используется выражение

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Pi}_{NS} - p\mathbf{I}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{\Pi}_{NS} = \eta \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - \left(\frac{2}{3}\right) \mathbf{I} \operatorname{div} \vec{u} \right] \quad (16)$$

– навье–стоксовский тензор вязких напряжений,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор–инвариант второго ранга. Тепловой поток  $\vec{q} = \vec{q}_{NS}$  задается в соответствии с законом Фурье

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T. \quad (17)$$

Для идеальных одноатомных газов при малых числах Кнудсена гипотезы (16), (17) подтверждаются кинетическим расчетом. Работу в единицу времени поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения вычисляют по той же формуле, что и механике твердого тела, а именно

$$\vec{A} = (\mathbf{P}_{NS} \cdot \vec{u}). \quad (18)$$

Считают, что удельная термодинамическая энтропия подчиняется дифференциальному тождеству Гиббса

$$Tds = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (19)$$

Уравнение ее баланса (13) может быть получено как следствие законов сохранения массы, импульса и энергии (10)–(11), если выбрать величину  $X = X_{NS}$  в виде

$$X = \alpha \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{(\mathbf{\Pi}_{NS} : \mathbf{\Pi}_{NS})}{2\eta T}, \quad (20)$$

где  $(\mathbf{\Pi}_{NS} : \mathbf{\Pi}_{NS}) = \sum_{i,j=1}^3 (\mathbf{\Pi}_{NS})_{ij} (\mathbf{\Pi}_{NS})_{ij}$  – двойное скалярное произведение двух одинаковых тензоров. Заметим, что правая часть равенства (20) неотрицательна. Подстановка выражений (14)–(18) в уравнения (9)–(10) дает классическую систему Навье–Стокса. Зависимости  $\eta = \eta(\rho, T)$  и  $\alpha = \alpha(\rho, T)$  могут быть найдены либо экспериментально, либо методами кинетической теории газов.

#### 2.4. Нетрадиционный подход к решению проблемы замыкания. Квазигидродинамическая система

Другое решение проблемы замыкания системы (9)–(13) было предложено в работах [1]–[2], где для определения гидродинамических величин использовалось не пространственное, пространственно–временное осреднение по некоторому множеству физически бесконечно малых четырехмерных параллелепипедов в пространстве  $R_{\vec{x},t}^4$ . Установлено, что в случае пространственно–временного осреднения вектор плотности потока массы  $\vec{j}_m$ , вообще говоря, не совпадает со средним импульсом единицы объема  $\rho \vec{u}$ . Детальный анализ возможного выбора величин  $\vec{j}_m, \mathbf{P}, \vec{q}, \vec{A}$  и  $X$  привел к следующему результату

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}), \quad (21)$$

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mathbf{\Pi}_{NS} + \rho \vec{u} \otimes \vec{w}, \quad (22)$$

$$\vec{q} = -\alpha \vec{\nabla} T, \quad (23)$$

$$\vec{A} = (\mathbf{\Pi}_{NS} \cdot \vec{u}) + \rho \vec{u} (\vec{w} \cdot \vec{u}) - p(\vec{u} - \vec{w}), \quad (24)$$

$$X = \alpha \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{(\mathbf{\Pi}_{NS} : \mathbf{\Pi}_{NS})}{2\eta T} + \frac{\rho \vec{w}^2}{\tau T}, \quad (25)$$

причем

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} \left[ \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p - \rho \vec{F} \right]. \quad (26)$$

Параметр  $\tau = \tau(\rho, T)$  характеризует масштаб временного сглаживания. В [2] для вычисления этого параметра была получена формула



$$\tau = \frac{\gamma}{Sc} \frac{\eta}{\rho c_s^2}, \quad (27)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $Sc$  – число Шмидта, которое для газов близко к единице,  $c_s$  – скорость звука.

Подставив выражения (21), (22) и (24) вместо величин  $\vec{j}_m$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\vec{A}$  в (9)–(11), получим квазигидродинамическую систему уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = \text{div}(\rho \vec{w}), \quad (28)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \vec{F} + \text{div} \mathbf{\Pi}_{NS} + \text{div}[(\rho \vec{w} \otimes \vec{u}) + (\rho \vec{u} \otimes \vec{w})], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \text{div} \left[ \rho \vec{u} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p \vec{u} \right] + \text{div} \vec{q} = \\ & = \rho \vec{F} \cdot (\vec{u} - \vec{w}) + \text{div}(\mathbf{\Pi}_{NS} \cdot \vec{u}) + \text{div} \left[ \rho \vec{w} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p \vec{w} + \rho \vec{u} (\vec{w} \cdot \vec{u}) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

КГД система (28)–(30) становится замкнутой, если дополнить ее уравнениями состояния (1), а коэффициенты  $\eta$ ,  $\varkappa$  и  $\tau$  представить как функции макроскопических параметров среды.

Подстановка выражений (21), (23) и (25) в (13) дает уравнение баланса энтропии

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} s) = \text{div}(\rho \vec{w} s) + \text{div} \left( \varkappa \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right) + \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{\Psi_{QHD}}{T}, \quad (31)$$

в котором

$$\Psi_{QHD} = \frac{(\mathbf{\Pi}_{NS} : \mathbf{\Pi}_{NS})}{2\eta} + \frac{\rho \vec{w}^2}{\tau}$$

– неотрицательная диссипативная функция.

Для КГД системы (28)–(30) получен ряд теоретических результатов [1],[2]. В частности показано, что стационарная КГД система, представленная в безразмерном виде, отличается от соответствующих ей уравнений Навье–Стокса дополнительными членами второго порядка малости по числу Кнудсена. Приближением ламинарного пограничного слоя для нее служит классическая система Прандтля.

## 2.5. Квазигидродинамическая система для вязкой несжимаемой жидкости

Для многих гидродинамических течений изменением плотности жидкости можно пренебречь. Считая величину  $\rho$  постоянной, из уравнений (28)–(29) получаем систему

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_{NS} + \operatorname{div}[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})], \quad (33)$$

замкнутую относительно неизвестных функций – скорости  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  и давления  $p = p(\vec{x}, t)$ . Здесь вектор  $\vec{w}$  определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau \left( (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{F} \right).$$

Тензор  $\mathbf{\Pi}_{NS}$  будем вычислять с помощью выражения

$$\mathbf{\Pi}_{NS} = \eta \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right].$$

Коэффициент динамической вязкости  $\eta$  и характерное время  $\tau$  считаются заданными положительными константами. Формально переходя в (32)–(33) к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , получим классические уравнения Навье–Стокса, описывающие течения вязкой несжимаемой жидкости.

Система (32)–(33) является диссипативной и обладает серией точных физически адекватных решений [1], [2]. Ее специализация на случай плоских или пространственных осесимметричных изотермических течений дает

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial (y^k u_y)}{\partial y} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial (y^k w_y)}{\partial y}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial (u_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial (y^k u_y u_x)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \\ & = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^k \nu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ 2 \frac{\partial (u_x w_x)}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial (y^k u_y w_x)}{\partial y} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial (y^k u_x w_y)}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial(y^k u_y^2)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{2}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^k \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - 2k\nu \frac{u_y}{y^2} + \\
& + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial x} + \frac{2}{y^k} \frac{\partial(y^k u_y w_y)}{\partial y},
\end{aligned} \tag{36}$$

причём

$$w_x = \tau \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad w_y = \tau \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Здесь  $\nu = \eta/\rho$  – коэффициент кинематической вязкости, параметр  $k$  равен нулю в плоском случае и единице – в осесимметрическом. Неизвестными величинами являются компоненты вектора скорости  $u_y = u_y(x, y, t)$ ,  $u_x = u_x(x, y, t)$  в локальном ортонормированном базисе  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  и давление  $p = p(x, y, t)$ .

Поле давления находится по уже известным полям скорости и температуры путем решения уравнения Пуассона

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^k \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial(y^k u_y)}{\partial y} \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^k \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right],
\end{aligned} \tag{37}$$

являющегося эквивалентным представлением (35) при  $\tau = const$ .

Введем также функцию тока  $\psi$ , связанную с соленоидальным полем  $\vec{u} - \vec{w}$  посредством соотношений [22]

$$u_y - w_y = -\frac{1}{y^k} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_x - w_x = \frac{1}{y^k} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{38}$$

На нижней границе расчетной области и на левой стенке, где выполняется условие непротекания, будем использовать нормировку  $\psi = 0$ . На верхней границе области величина функции тока равна расходу жидкости.

### 3. Постановка задачи и вычислительный алгоритм

Рассмотрим плоское двумерное движение газа в канале высоты  $H$  и длины  $L$  при малых числах Маха. Во входном сечении канала имеется сужение, величина которого определяется высотой уступа  $h$ . Схема расчетной области и образующегося течения приведена на рис. 1. Сплошная среда в этом случае является слабосжимаемой, и в качестве основной математической модели можно использовать КГД систему (34)–(36) при  $k=0$ . Приведем ее к безразмерному виду с помощью соотношений

$$x = \tilde{x}H, \quad y = \tilde{y}H, \quad u_x = \tilde{u}_x U_0, \quad u_y = \tilde{u}_y U_0, \quad p = \tilde{p} p U_0^2, \quad t = (\tilde{t}H)/u_0, \quad \text{Re} = (U_0 H)/\nu,$$

где

$$U_0 = \frac{1}{H-h} \int_h^H u_0(y) dy$$

– средняя по сечению скорость жидкости в канале,  $u_0(y)$  – заданный профиль скорости во входном сечении. Записанную в безразмерной форме систему дополним граничными условиями:

- нижняя твёрдая стенка

$$y = 0, \quad 0 < x < L, \quad u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

- верхняя твёрдая стенка

$$y = 1, \quad 0 < x < L, \quad u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

- левая твёрдая стенка

$$x = 0, \quad 0 < y < h, \quad u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

- участок втекания на левой границе

$$x = 0, \quad h < y < 1, \quad u_x = u_0(y), \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const};$$

- правая граница

$$x = L, \quad 0 < y < 1, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad p = 0.$$

Граничные условия для давления на твердых стенках следуют из условий прилипания для компонент скорости и условия непротекания потока массы. Градиент давления на входе в канал, в принципе, может быть задан произвольно. Один из возможных способов вычисления этой величины заключается в следующем. Зададим профиль скорости на входе в канал в виде параболы Пуазейля [22], [23]:

$$u_0(y) = \frac{\text{Re}}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (1-y)(h-y). \quad (39)$$

Расход жидкости во входном сечении вычисляется по формуле

$$J = \int_h^1 [u_x(0,y) - w_x(0,y)] dy = -\frac{\text{Re}}{12} (1-h)^3 \frac{\partial p}{\partial x} - \tau(1-h) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (40)$$

Из (40) находим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12J}{\text{Re}(1-h)^3} \left[ 1 + \frac{12\tau}{\text{Re}(1-h)^2} \right]^{-1}. \quad (41)$$

В качестве начальных условий выбиралось состояние покоя:  $u_x = u_y = 0$ . Градиент давления в начальный момент считался постоянным во всем поле течения. Поставленная задача была решена численно с помощью алгоритма, аналогичного описанному в [14]–[16], который представляет собой явную по времени конечно-разностную схему второго порядка точности по пространству.

Для ламинарных течений безразмерный параметр сглаживания  $\tau$  вычисляется как

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}_s^2} + \tau_0, \quad \text{где } \text{Re}_s = \frac{c_s H}{\nu} \quad (42)$$

– число Рейнольдса, вычисленное по скорости звука. Для рассматриваемых течений воздуха при нормальной температуре  $c_s = 3.4 \cdot 10^4$  см/с,  $\nu = 0.15$  см<sup>2</sup>/с,  $H = 10$  см,  $\text{Re}_s = 2 \cdot 10^6$ . Величина  $\tau$  выбирается в процессе вычислений для обеспечения устойчивости счета. При расчете турбулентных течений величина  $\tau$  подбирается так, чтобы получить решение задачи, адекватное эксперименту.

#### 4. Численное моделирование ламинарных течений

Ламинарные режимы течений исследовались для чисел Рейнольдса  $\text{Re}_h = 100, 200, 300, 400$ ;  $h/H = 1/2$ . Профиль скорости во входном сечении представлял собой параболу Пуазейля (39). Безразмерная величина расхода  $J$  полагалась равной единице, что соответствовало выбору градиента давления на входе в канал в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{96}{\text{Re}} \left[ 1 + \frac{48\tau}{\text{Re}} \right]^{-1}.$$

Рассчитанная длина отрывной зоны за уступом сравнивалась с данными

из работы [3]. Она определялась также с помощью графиков, приведенных в [5].

В [3] число Рейнольдса вычислялось по средней скорости течения и высоте ступеньки. Входной профиль задавался в виде параболы Пуазейля. Расход жидкости  $J$  полагался равным единице. Приведены, в частности, длины отрывной зоны для вариантов  $H = 2h$ ,  $Re_h = 100, 200, 300$ . В [5] число Рейнольдса определялось по величине  $2h$  и средней скорости на входе. Для ламинарных течений имеются данные по длине отрывной зоны в виде графика в диапазоне чисел  $50 < Re_{2h} < 800$ .

Полученные авторами результаты систематизированы в таблице 1. Здесь  $L$  – безразмерная длина расчетной области,  $N_x, N_y$  – число расчетных точек по обоим направлениям,  $L_s$  – длина отрывной зоны,  $N_{iter}$  – число шагов по времени до сходимости. Расчеты проведены на равномерной по обоим направлениям пространственной сетке с одинаковыми шагами  $h_x = h_y = 0.025$ . Известно, что использование равных шагов  $h_x$  и  $h_y$  улучшает точность описания отрывного течения.

$Re(h)$	100	200	300	400
$L$	7.5	5.0	7.5	10
$N_x \times N_y$	$300 \times 40$	$200 \times 40$	$300 \times 40$	$400 \times 40$
$\tau$	0.005	0.0025	0.00166	0.00125
$N_{iter}$	~90000	~80000	~80000	~110000
$L_s/h$	5.0	8.2	10.1	14.8
$L_s/h$ [3] расчёт	4.43	7.5	10.0	–
$L_s/h$ [5] эксп.	5.0	8.5	11.3	14.2
$L_s/h$ [5] расчёт	5.0	8.3	8.4	7.8

Таблица 1: Расчёт ламинарных течений.

Для указанных течений  $Re_s \sim 10^6$ , и значение  $\tau = \tau_0$  в формуле (42) вычислялось, как  $\tau_0 = \alpha/Re$ . Для приведенных в таблице вариантов коэффициент  $\alpha$  полагался равным 0.5. Шаг по времени  $\delta t$  был одинаков для всех указанных вариантов и составлял  $10^{-4}$ . Расчет прекращался при выполнении условия  $\delta p < 10^3$ , где

$$\delta p = \max \left| \frac{p^{n+1} - p^n}{\delta t} \right|.$$

Во всех вариантах течение выходит на стационарный режим. Длина отрывной зоны  $L_s$  определялась по положению нулевой линии тока и указа-

на с точностью порядка 0.2. Сравнение приведенных расчетов с соответствующими данными, полученными на основе системы Навье–Стокса, а также с данными эксперимента [5] показывает хорошее соответствие длины отрывной зоны и общей картины течения. Для значений  $Re = 300$  и  $400$  расчет по КГД уравнениям лучше соответствует данным эксперимента, чем приведенный в [5] расчет по модели Навье–Стокса. Наблюдается почти линейный рост значений  $L_s$  с ростом числа  $Re$ .

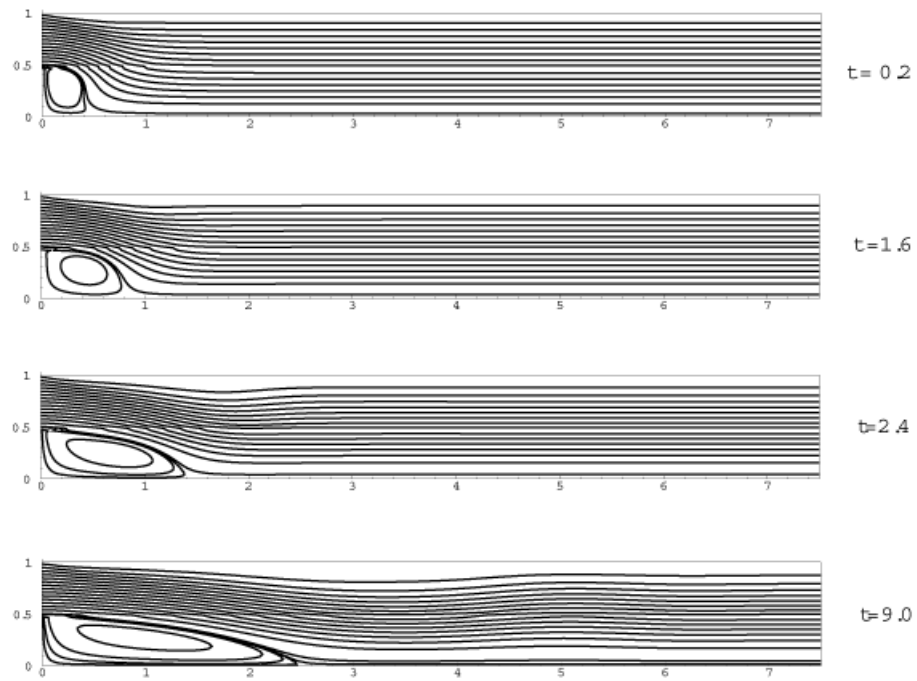
Для чисел  $Re = 100$  и  $200$  процесс установления течения представляет собой зарождение и последующий рост одного вихревого образования за уступом. Для  $Re = 300$  и  $400$  процесс установления носит колебательный характер и сопровождается зарождением и отрывом вихрей, но, в отличие от рассмотренных далее режимов течения при больших числах  $Re$ , этот колебательный процесс затухает, приводя к образованию одного стационарного вихря за уступом. Изолинии функции тока  $\psi$ , построенные в соответствии с (38) и иллюстрирующие процесс установления течения по времени для вариантов  $Re=100$  и  $400$ , приведены на рис. 2. Изолинии расположены эквидистантно.

Для варианта  $Re=100$  исследовались влияние параметра регуляризации  $\tau$  и сходимость численного решения по сетке. Значение  $\tau$  дополнительно выбиралось равным  $5 \cdot 10^{-4}$  и  $5 \cdot 10^{-2}$ . При этом пропорционально изменялся и шаг интегрирования по времени  $\delta t$ . Помимо указанной в таблице, использовалась также сетка со сгущением узлов в два раза по каждому направлению. Это привело к уменьшению временного шага интегрирования вдвое. Установлено, что длина отрывной зоны и общая картина течения практически не зависят ни от величины параметра регуляризации  $\tau$ , ни от величины шага по пространству. Увеличение  $\tau$  приводит к сглаживанию картины течения и позволяет увеличить шаг интегрирования системы по времени. Уменьшение пространственного шага позволило более детально разрешить картину течения.

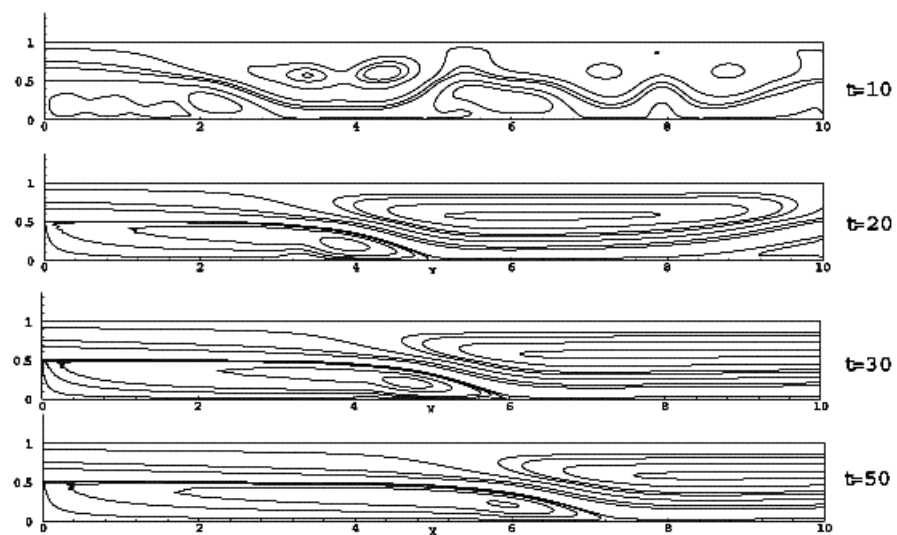
Исследовалась чувствительность решения к выбору профиля скорости и градиента давления во входном сечении при неизменных средней скорости и расходе. Установлено, что изменение градиента давления от  $-96/Re$  до  $-12/Re$  практически не влияет на структуру течения: уже на расстоянии порядка  $0.5h$  давление подстраивается под имеющийся расход жидкости и практически не зависит от начального градиента. Форма профиля скорости, напротив, сильно влияет на размер области отрыва: при задании плоского профиля размер отрывной зоны уменьшается примерно в 1.5 раза по сравнению с выбором входного профиля в виде параболы Пуазейля.

Таким образом, результаты численных экспериментов для ламинарных течений жидкости за уступом показывают, что расчеты на основе КГД уравнений совпадают с результатами, полученными на основе урав-

нений Навье–Стокса и в эксперименте. Этот вывод подтверждается теоретическими оценками, согласно которым для стационарных течений содержащие  $\tau$  слагаемые являются малыми и решение КГД уравнений близко к решению уравнений Навье–Стокса. При этом добавочные члены играют роль регуляризаторов, позволяющих использовать достаточно простой, устойчивый и точный численный алгоритм.



a)  $Re = 100$



b)  $Re = 400$

Рис. 2



## 5. Численное моделирование турбулентных течений

Задача о течении за уступом решалась в соответствии с параметрами экспериментов Р. Вебер и Ж. Юро [20], [21], а именно, для чисел  $Re_h = 4667, 4012, 1667$  и  $1016$  и отношения  $h/H = 0.5, 0.44, 0.33$  и  $0.2$  соответственно. Во входном сечении задавался плоский профиль скорости. Градиент давления на входе в канал вычислялся по формуле

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{A}{Re}.$$

Параметр  $A$  выбирался из условия равенства единице безразмерной скорости течения на входе в канал.

Результаты проведенных расчетов систематизированы в табл. 2–5 и представлены на рис. 3–7. Расчеты проведены на равномерных пространственных сетках с шагами, одинаковыми по обоим направлениям. Параметр  $\tau$  варьировался в широких пределах. Во всех перечисленных в таблицах расчетах шаг по времени был равен  $\delta t = 10^{-4}$ . Указаны также номер варианта расчета, значение параметра сглаживания  $\tau$ , величина шага по пространству  $h_x = h_y$ , число расчетных точек  $N_y \times N_x$ , безразмерная длина расчетной области  $L$ , безразмерное время счета  $T_0$ , и номера рисунков, иллюстрирующих рассчитанное течение.

В отличие от ламинарных режимов все решения, полученные для больших чисел Рейнольдса, оказываются нестационарными. Сходимость по невязке для давления не достигается, и величина невязки  $\delta p$  колеблется вблизи 0.1. Мгновенные картины течения имеют следующий характер: возникающий за уступом единый вихрь увеличивается в длину и разбивается на несколько вихревых образований, вращающихся в противоположных направлениях, которые затем отрываются от основного вихря и сносятся вниз по течению до тех пор, пока не выйдут за границу расчетной области. Вблизи верхней поверхности канала также образуются небольшие зоны отрыва, которые смещаются вниз по потоку (см. рис. 3–7).

Для визуализации нестационарного численного решения были построены мгновенные картины линий тока и зависимости компонент скорости от времени. Зависимости от времени строились с интервалом в 500 временных шагов, то есть с шагом  $\Delta t = 500 \cdot \delta t = 0.05$ , запись полей скорости и давления велась с интервалом 5000 шагов (интервал по времени  $\Delta t_1 = 0.5$ ).

Приведем оценки временных характеристик процесса для одного из вариантов. Для варианта  $Re=1667$  в размерных единицах имеем  $H=71$  мм,  $U_0 = 1.25$  м/сек,  $\delta t = 5.6 \cdot 10^{-6}$  сек. Безразмерное время  $t = 1$  соответствует 0.056 сек. Характерное время расчета составляет порядка 100 безразмер-

ных единиц, то есть 5.6 сек. В PIV методе [20]–[21] частота лазерных импульсов составляет 10 Гц, то есть интервалы между ними равны 0.1 сек. Таким образом, времена, характеризующие изменение скоростей в численном расчете, на несколько порядков меньше тех, которые используются при измерениях. Поэтому непосредственное сопоставление рассчитанных и измеренных полей скорости оказывается невозможным. Для сопоставления этих полей были дополнительно построены картины траекторий жидких частиц и осредненные по времени поля скорости.

В эксперименте поля скорости осредняются на интервале порядка 8–10 сек. В расчете время осреднения  $t_2 - t_1$  составляет около 10–20 безразмерных единиц. Интервал численного осреднения много меньше интервала, используемого в эксперименте. Однако количество осредняемых полей в расчете примерно соответствует числу осредняемых изображений в эксперименте, что делает соответствующие процедуры нахождения средних в целом эквивалентными. Как видно из приведенных далее рисунков, для быстропеременных течений поля траекторий и осредненные поля скорости существенно отличаются от мгновенных картин функции тока. Возвратное течение хорошо просматривается на картинах осредненного поля скоростей. Размер зоны отрыва зависит от параметра  $\tau$ . Варьируя  $\tau$ , удается получить адекватный эксперименту размер возвратного течения и его структуру.

Для варианта  $Re=4667$  рассчитан энергетический спектр пульсаций компонент скорости. Алгоритмы построения траекторий жидких частиц, осредненных картин течения и спектра пульсаций скоростей приведены в Приложении.

### 5.1. Расчёт варианта с $Re=4667$

Наиболее детально был проанализирован расчет течения при  $Re = 4667$  ( Табл. 2, Рис.3 – 6).

N var	$\tau$	$h_x$	$N_x \times N_y$	$L$	$T_0$	Номер рисунка
1	0,0001	0,0125	80x400	5	20	–
2	0.001	0.00833	120x600	5	40	Рис. 3
3	0.001	0.0125	80x400	5	20	–
4	0.05	0.00833	120x600	5	120	Рис. 4 а,b,c,d
5	0.05	0.0125	80x400	5	120	Рис. 5 а,b
6	0.08	0.0125	80x600	7.5	40	–
7	0.1	0.0125	80x400	5	120	Рис. 6

Таблица 2: Варианты расчетов для  $Re=4667$ ,  $H=101$  мм,  
 $U_0 = 1.40$  м/сек,  $h/H = 0.5$

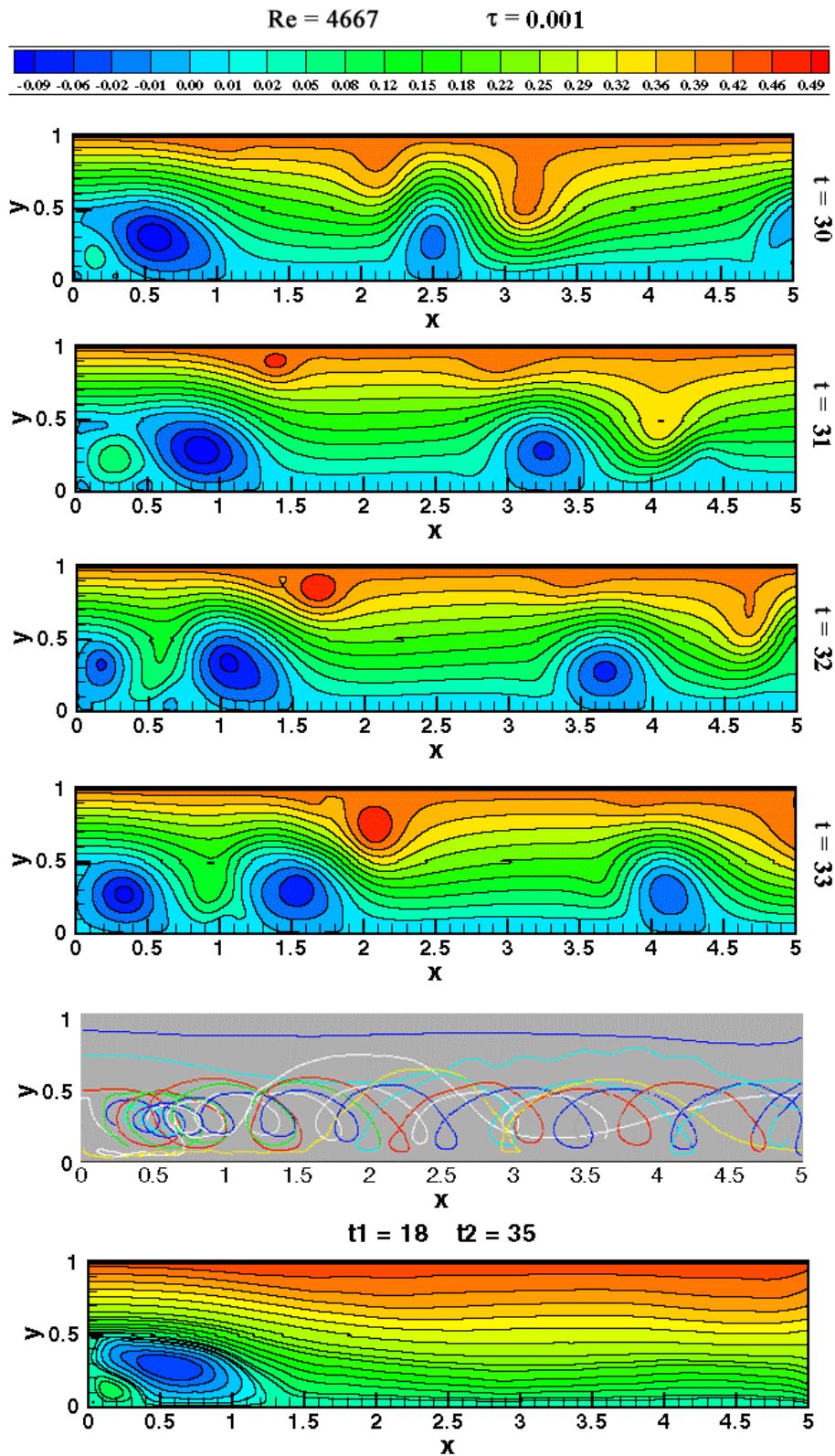


Рис. 3

Варианты 1–3 рассчитаны для параметров  $\tau = 0.001$  и  $0.01$ . Полученные течения являются нестационарными. На рис. 3 приведены после-

довательности мгновенных изолиний функции тока и траектории, построенные в соответствии с приложением 7.1, а также осредненное течение (см. приложение 7.2) для варианта 2,  $\tau = 0.001$ . Размер отрывной зоны, определенный по осредненному течению (последний рисунок), составляет ( $L_s/h \sim 2.5$ ), что существенно меньше, чем в эксперименте. Такой же средний размер отрывной зоны получается и в расчете на более грубой пространственной сетке с тем же  $\tau$  (расчет 3), и при выборе меньшего  $\tau = 0.0001$  (расчет 1). В последнем случае шаг по времени составлял  $\delta t = 10^{-5}$ . Таким образом, при  $\tau \leq 0.001$  за уступом формируется квазипериодическое течение, вид которого слабо зависит от величины  $\tau$  и шага пространственной сетки. В этих расчетах зона отрыва оказывается меньше, чем в эксперименте.

Варианты 4 и 5 соответствуют  $\tau = 0.05$ . На рис. 4 приведены результаты расчета варианта 4. В частности, на рис. 4b показаны осредненные по различным интервалам времени поля течения. Здесь же приведена полученная в эксперименте [20], [21] осредненная картина течения. Видно достаточно хорошее соответствие полученных в расчете и эксперименте осредненных картин, как по размерам ( $L_s/h \sim 2.5$ ), так и по структуре отрывной зоны, представляющей собой сосуществование двух вихревых образований. Осредненная картина слабо зависит от выбранного интервала осреднения, поскольку величина этого интервала существенно больше характерного времени колебания скоростей.

На рис. 4c представлен фрагмент зависимости от времени составляющих скоростей  $u_x$  и  $u_y$  в трех точках, расположенных за уступом вдали от стенки. Течение существенно нестационарно и имеет квазипериодический характер. Общий вид приведенных кривых мало зависит от конкретного выбора точки внутри области расчета.

На рис. 4d приведены спектры пульсаций  $E(k)$  компоненты скорости  $u_x$  в трех пространственных точках. Приведенный спектр можно считать достоверным до  $k \approx 250$ . Гармоника  $k = 0$  на указанном рисунке отсутствует, так как она соответствует среднему значению скорости  $\bar{u}$ . Разложение в ряд Фурье (см. приложение 7.3) выполняется после завершения начального процесса установления колебаний на интервале времени с  $t = 40$  до  $t = 120$ . Видны основные частоты процесса и убывание амплитуды гармоник для больших и малых чисел  $k$ . Максимальная амплитуда соответствует волновому числу  $k = 17$ . Из формулы (П.1) следует, что этому волновому числу отвечает период колебаний  $T = (120 - 40)/17 \approx 4.7$ , который хорошо виден на рис. 4с.

$Re = 4667$        $\tau = 0.05$

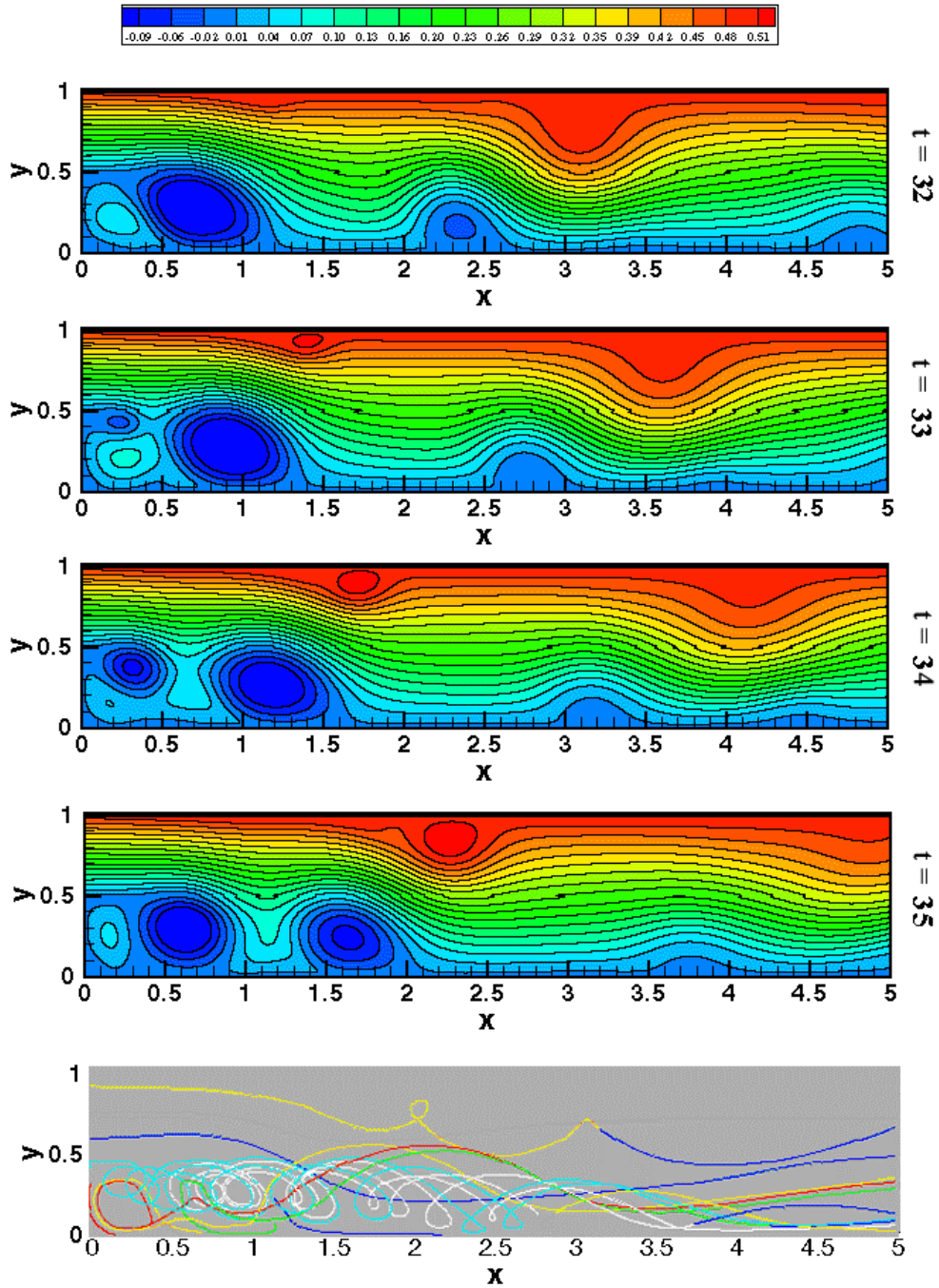
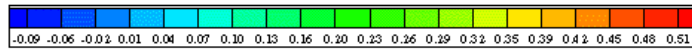


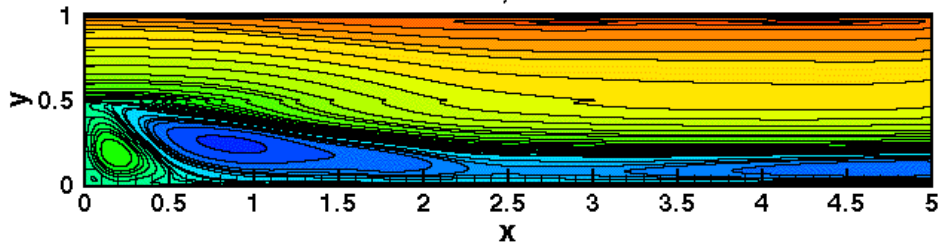
Рис. 4а

Re = 4667

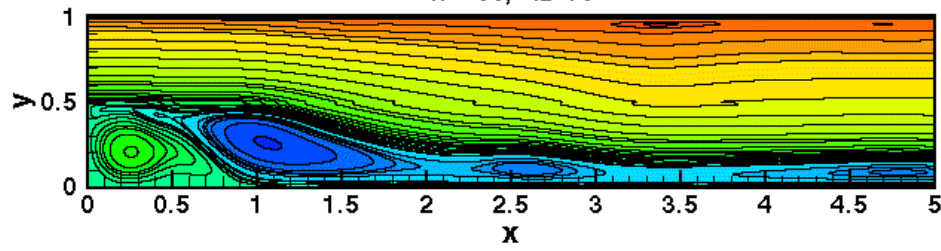
$\tau = 0.05$



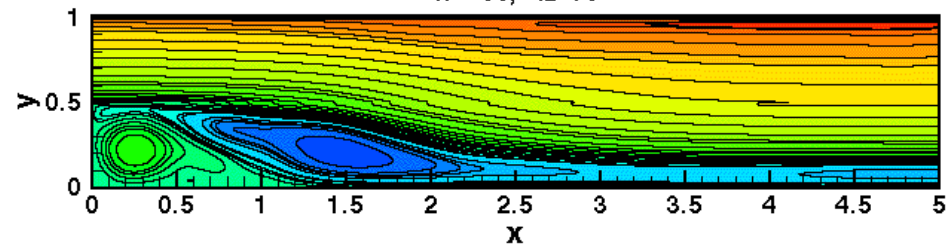
t1 = 26, t2=46



t1 = 50, t2=70



t1 = 60, t2=70



t1 = 26, t2=70

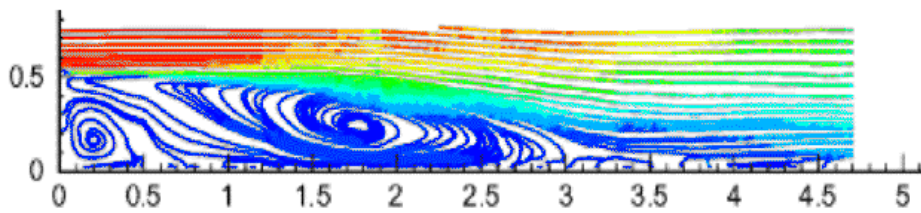
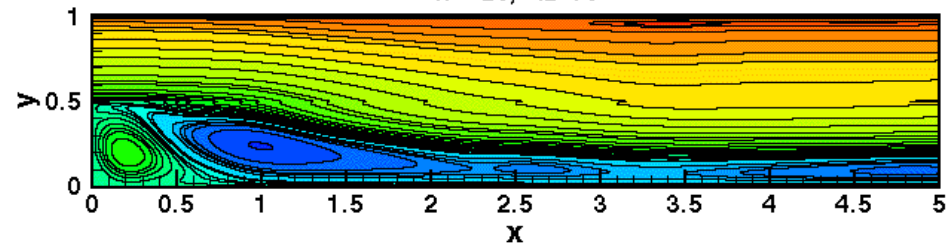


Рис. 4б

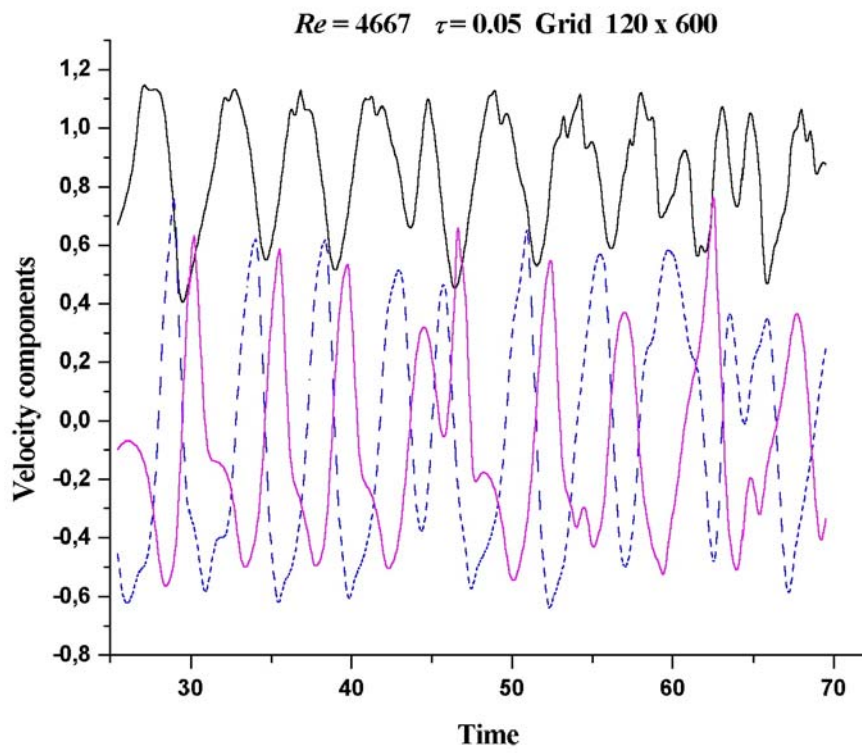


Рис. 4с

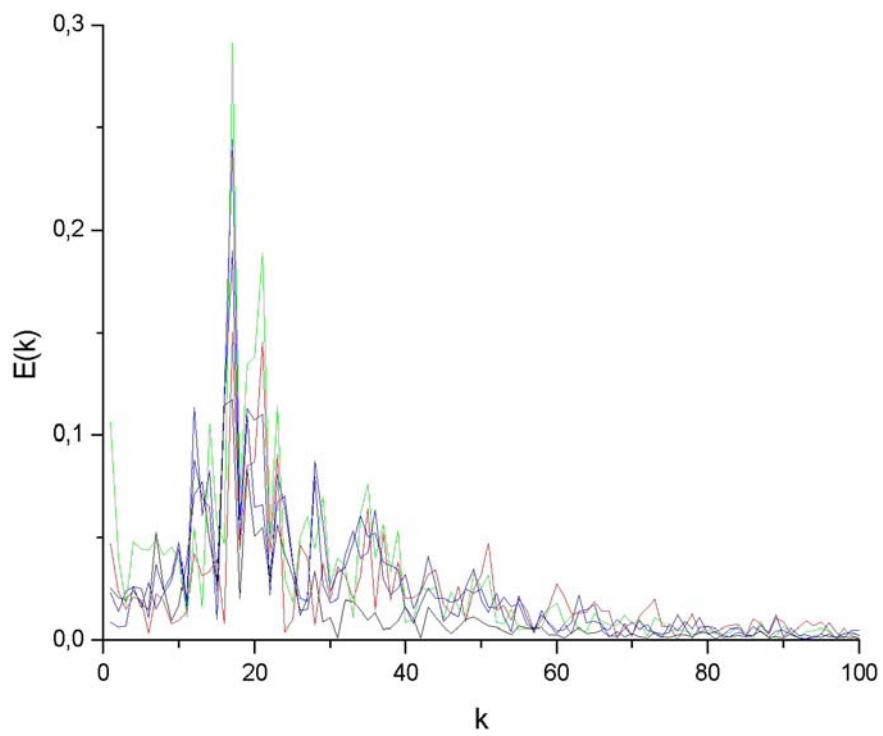


Рис. 4д

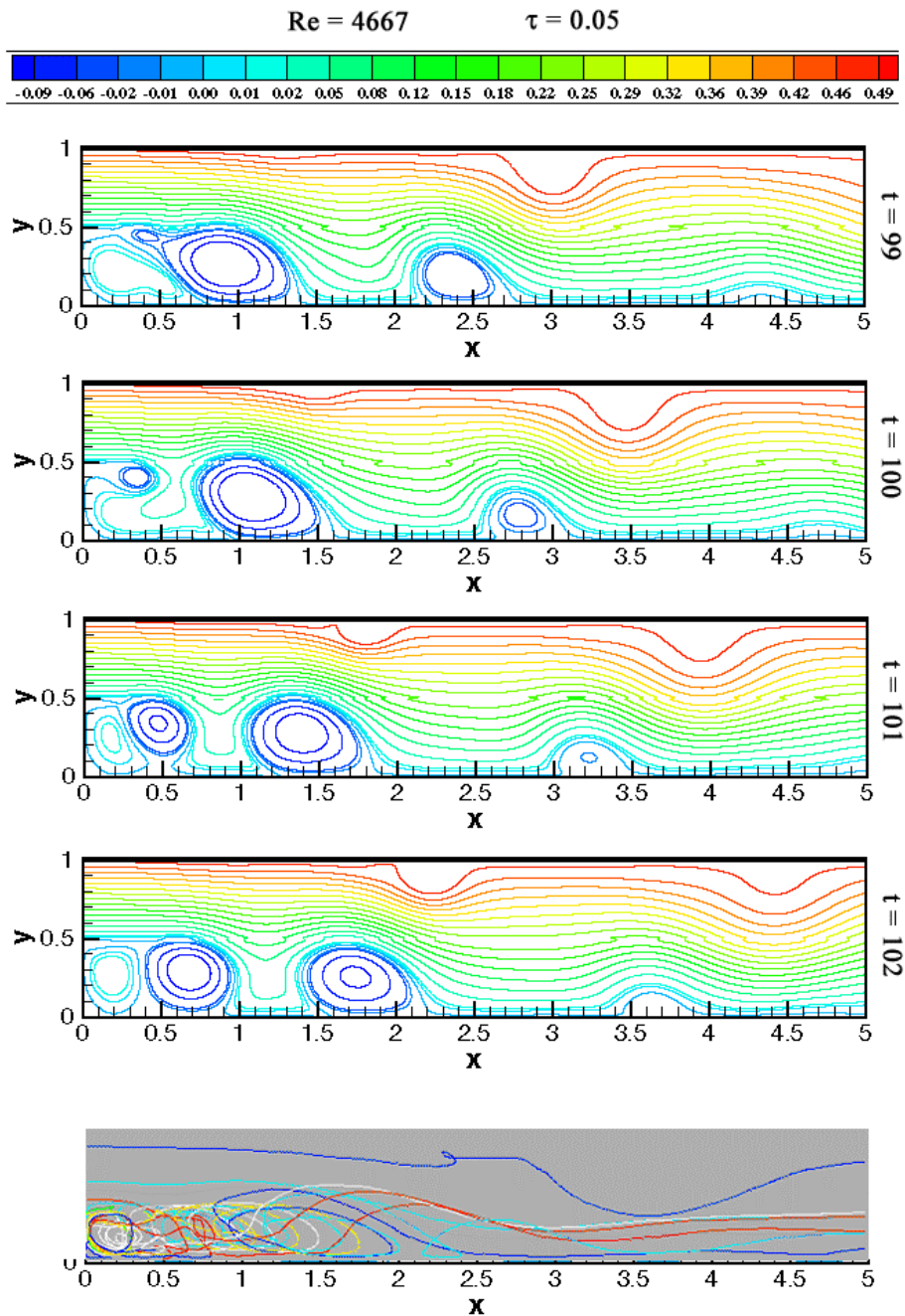


Рис. 5а

Рис. 5 иллюстрирует расчет 5, который отличается от расчета 4 использованием более грубой пространственной сетки. Графики мгновенных линий тока и траекторий частиц очень близки к полученным в варианте 4. Временная зависимость компонент скорости оказывается более регулярной и ближе напоминает периодический режим, чем в варианте 4. В



целом результаты расчетов 4 и 5, полученные на различных пространственных сетках, оказываются близкими. Вариант 5 был повторен в расчетной области, включающей в себя узкую часть канала перед уступом длины  $h$  (Рис.1). Получено, что течение за уступом практически не зависит от наличия входной зоны канала. Для варианта 5 установлено также, что течение слабо зависит от градиента давления на входе в канал и, в отличие от ламинарного режима, от формы профиля скорости на входе при неизменном расходе (сравнивались плоский профиль и профиль Пуазейля).

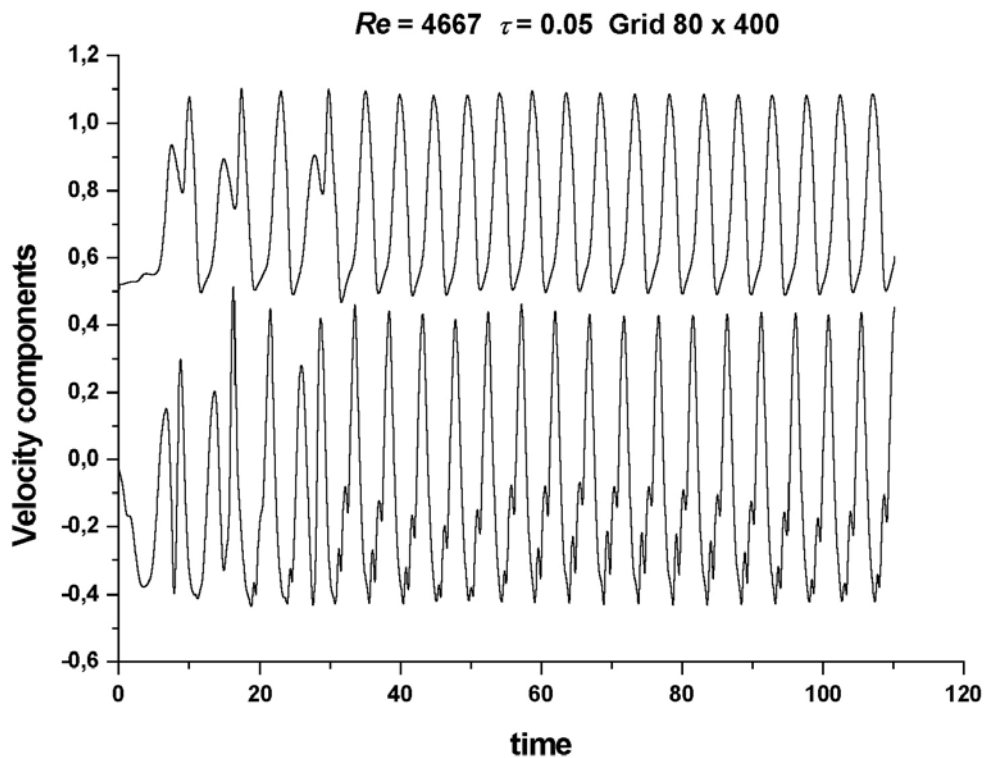


Рис. 5b

На рис. 6 показаны изолинии функции тока и траектории частиц для варианта 7 с большим параметром сглаживания  $\tau = 0.1$ . При этом течение становится нефизичным: нестационарная отрывная зона за уступом неограниченно растет, достигая правой границы расчетной области. Скорости в потоке меняются медленно, и траектории жидких частиц оказываются близкими к форме изолиний функции тока. Осредненное течение в этом расчете не представляет интереса. На рис. 6b показан характер затухания колебаний скоростей во времени. Аналогичные картины получены в расчете 6.

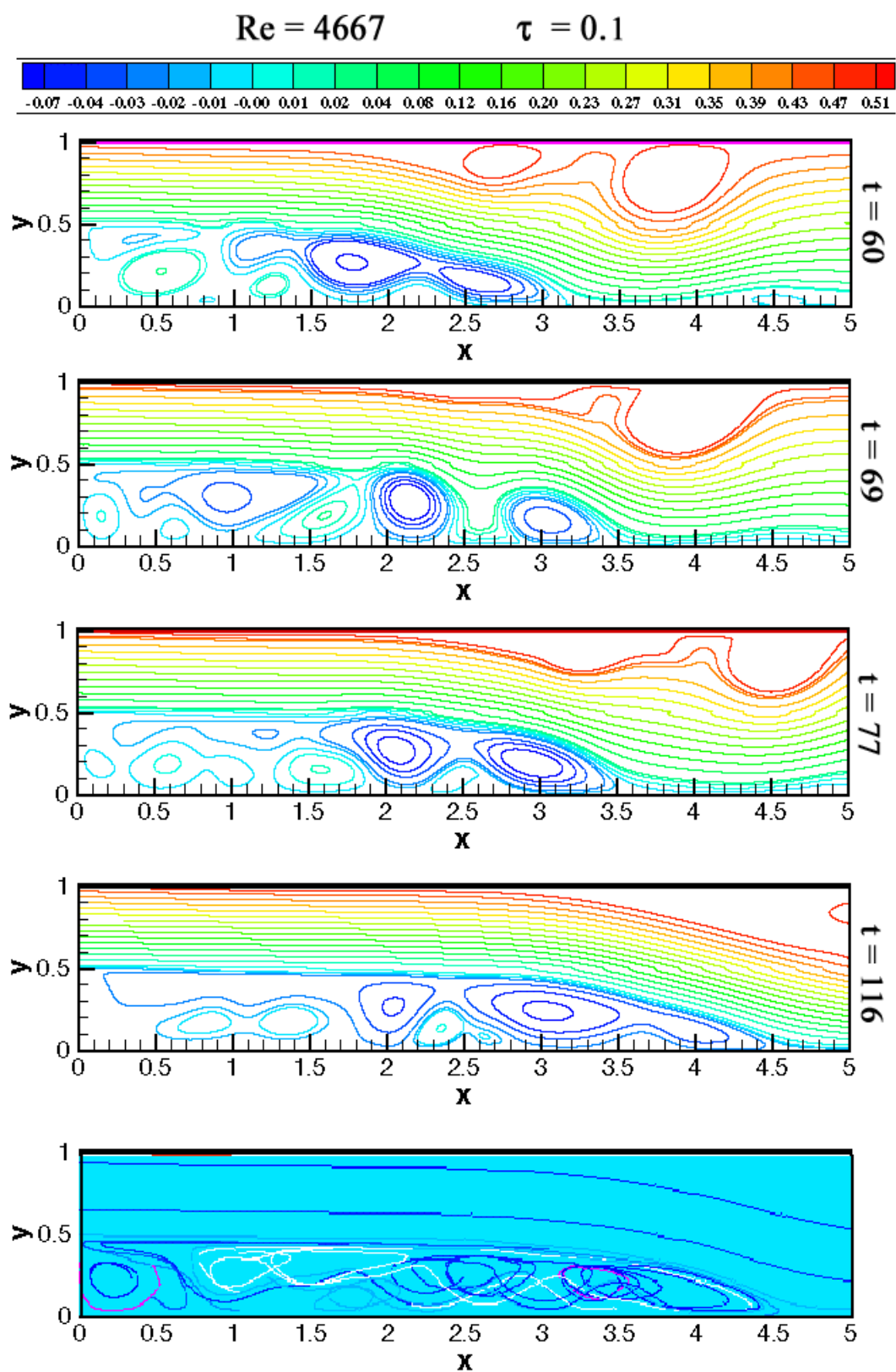


Рис. 6

## 5.2. Варианты с Re=4012, 1667 и 1016

Результаты, полученные для этих вариантов, аналогичны описанным выше. Данные этих расчетов приведены в таблицах 3–5.

Для  $Re = 4012$ , табл. 3, получено нестационарное решение, в котором размер отрывной зоны ( $L_s/h \sim 2$ ) оказывается меньше, чем в эксперименте. Параметр  $\tau$  в этом расчете не варьировался.

При  $Re = 1667$  и  $1016$ , табл. 4 и 5, варианты расчета 2 по средней длине отрывной зоны ( $L_s/h \sim 6$ ) соответствуют теоретическим и экспериментальным данным. В вариантах расчета 1 ( $L_s/h \sim 2.5$ ) протяженность зоны отрыва оказывается недостаточной, а в вариантах 3 решение оказывается нефизичным (зона отрыва неограниченно растет).

$N_{\text{var}}$	$\tau$	$h_x$	$N_x \times N_y$	$L$	$T_0$	Номер рисунка
1	0,001	0,0125	80×400	5	20	–

Таблица 3: Варианты расчетов для  $Re=4012$ ,  $H=92$  мм,  
 $U_0 = 1.45$  м/сек,  $h/H = 0.44$

$N_{\text{var}}$	$\tau$	$h_x$	$N_x \times N_y$	$L$	$T_0$	Номер рисунка
1	0,001	0,0125	80×400	5	20	–
2	0.02	0.0125	80×480	6	160	Рис. 7
3	0.05	0.0125	80×480	6	60	–

Таблица 4: Варианты расчетов для  $Re=1667$ ,  $H=71$  мм,  
 $U_0 = 1.25$  м/сек,  $h/H = 0.33$

$N_{\text{var}}$	$\tau$	$h_x$	$N_x \times N_y$	$L$	$T_0$	Номер рисунка
1	0,001	0,0125	80x240	3	20	–
2	0.01	0,01	100x300	3	15	–
3	0.02	0.01	100x300	3	10	–

Таблица 5: Варианты расчетов для  $Re=1016$ ,  $H=63$  мм,  
 $U_0 = 1.27$  м/сек,  $h/H = 0.20$

На рис. 7 приведена последовательность мгновенных значений функции тока и траектории частиц для  $Re=1667$ , вариант 2. Здесь же показана серия осредненных полей скорости совместно с осредненной кар-

тиной течения, полученной в эксперименте [20], [21]. Видно хорошее согласование размера и структуры течения в зоне отрыва. Приведена временная развертка для компонент скорости течения, показывающая квазипериодичность процесса.

**$Re = 1667$**

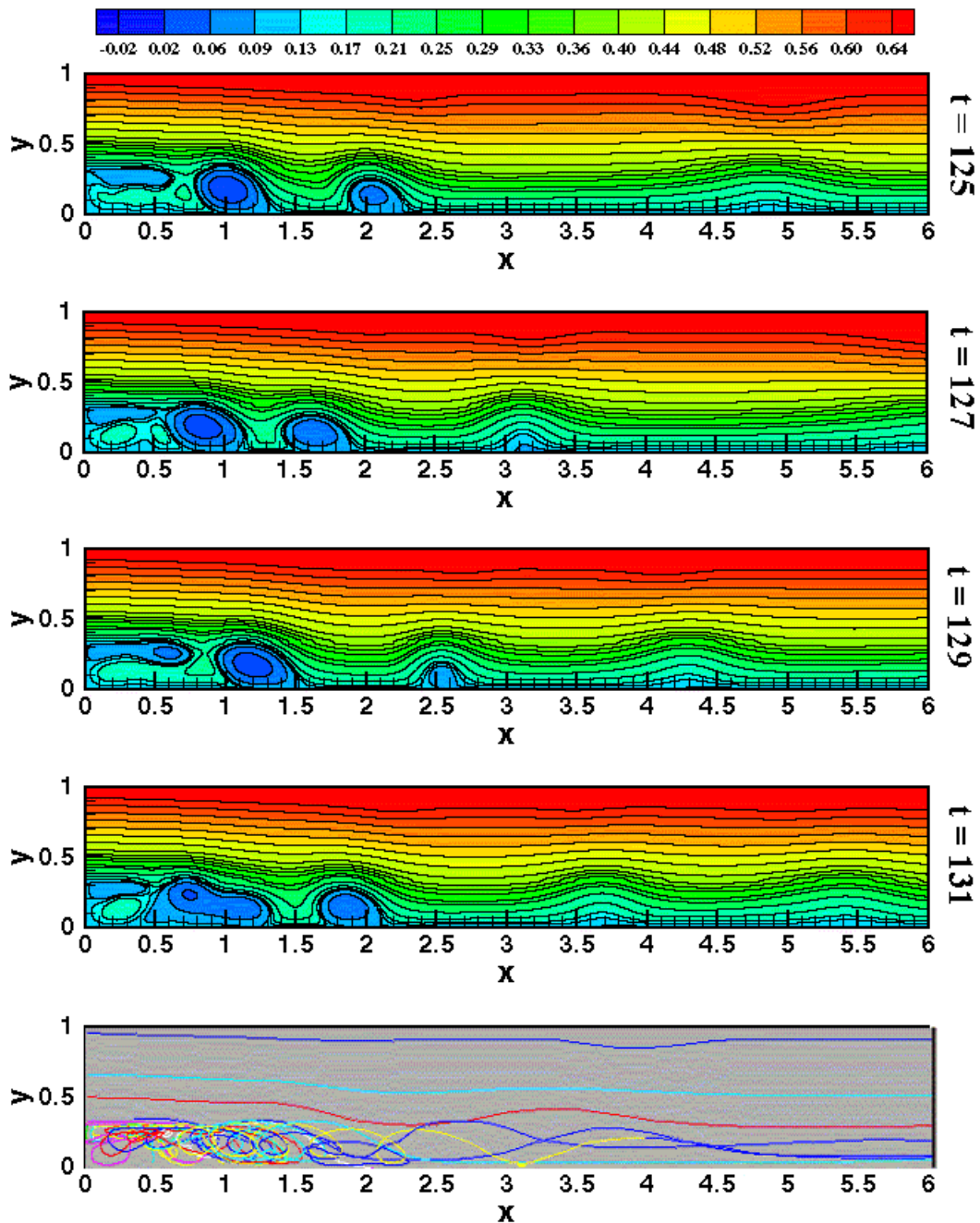


Рис. 7а

Подчеркнем, что представленные численные результаты получены на основе КГД уравнений без привлечения традиционных моделей турбулентности. В отличие от ламинарных режимов, при больших числах  $Re$  течения оказываются существенно нестационарными. Как показывают

теоретические оценки, для сильно нестационарных течений дополнительные КГД слагаемые не малы и могут существенно влиять на решение задачи.

**$Re = 1667$**

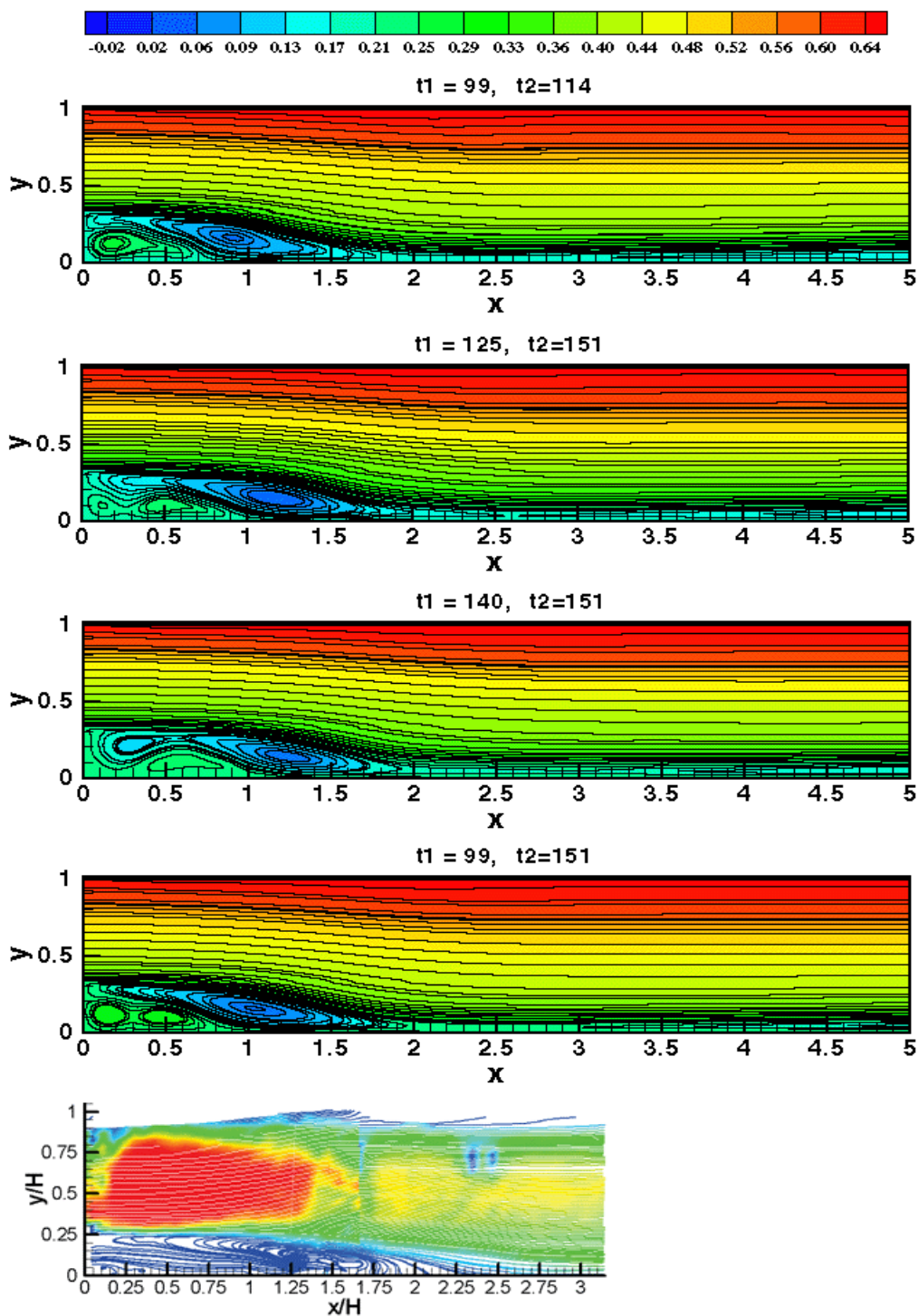


Рис. 7б

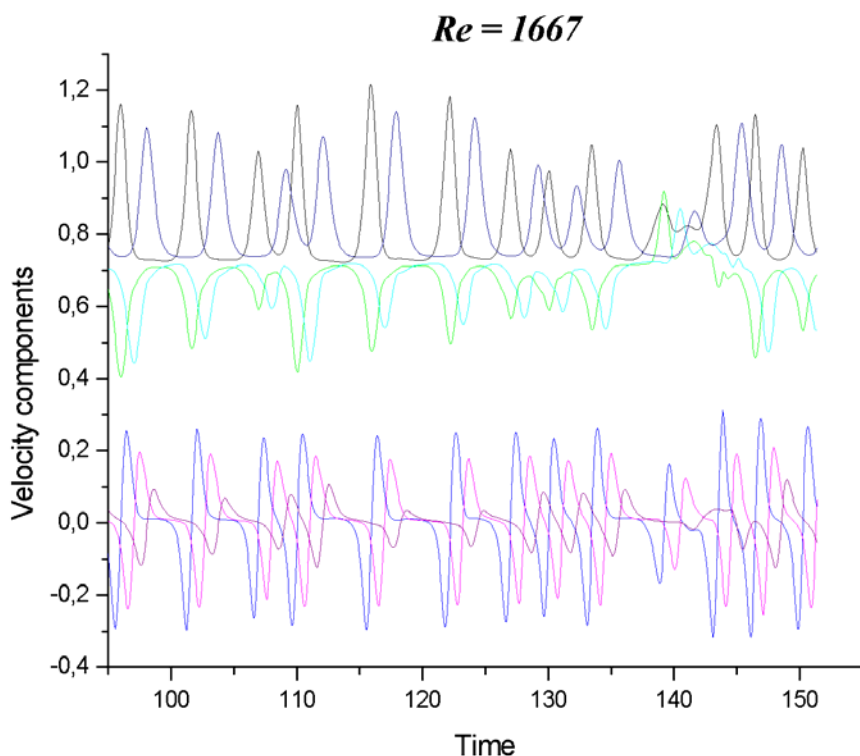


Рис. 7с

## 6. Заключение

Путем численного моделирования получено, что для малых чисел  $Re$  возникают ламинарные течения, являющиеся стационарными. Их основные характеристики хорошо согласуются с результатами, полученными на основе системы Навье–Стокса, а также с имеющимися в литературе экспериментальными данными. Колебания решений, возникающие при установлении ламинарных режимов для умеренных чисел Рейнольдса, затухают с течением времени. Установившееся течение практически не зависит от выбора параметра временного сглаживания  $\tau$ .

При больших числах Рейнольдса численные решения существенно нестационарны, их характеристики зависят от величины  $\tau$ . Сопоставление этих течений с экспериментом проведено на основе осредненных полей скорости. Для достаточно малых  $\tau$  в нестационарном течении присутствуют вихревые образования, периодически формирующиеся за уступом, а затемдвигающиеся направо и выходящие за расчетную область через правую свободную границу. Подбирая параметр сглаживания  $\tau$ , удастся получить течение, которое после осреднения по времени оказывается близким по своей структуре к наблюдаемому в эксперименте. Согласие с

экспериментом по длине и структуре отрывной зоны для осредненного течения получено для вариантов с  $Re=4667$ ,  $\tau = 0.05$ , и с  $Re = 1667$ ,  $\tau = 0.02$ . В размерном виде значения  $\tau$  составляют  $3.6 \cdot 10^{-3}$  сек. и  $1.12 \cdot 10^{-3}$  сек. соответственно. В обоих случаях как в расчете, так и в эксперименте средняя длина отрывной зоны  $L/h$  приблизительно равна 6. Таким образом, варьируя параметр  $\tau$  удается получить структуру отрывной зоны, соответствующую данным эксперимента для турбулентных течений.

Результаты расчетов показывают, что использование КГД уравнений позволяет численно моделировать как стационарные ламинарные, так и турбулентные режимы течений. В рамках этой модели турбулентные течения оказываются существенно нестационарными. По мнению авторов, возможность численного моделирования этих режимов обусловлена присутствием в КГД уравнениях дополнительных по сравнению с системой Навье–Стокса диссипативных слагаемых, которые малы для стационарных режимов и не являются малыми для нестационарных турбулентных течений.

## 7. Приложение

### 7.1. Траектории жидких частиц

Положение частицы  $\vec{X}$  в момент времени  $t_0 + \Delta t_1$  определялось по рекуррентной формуле

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_1} \vec{u}(\vec{x}, t) dt,$$

где  $\vec{X}_0$  – положение частицы в момент времени  $t_0$ . Интеграл по времени вычислялся методом линейной интерполяции. Отрезок  $[t_0, t_0 + \Delta t_1]$  разбивался на  $K$  промежутков. Как показали численные расчеты, начиная с  $K = 40$  результат интегрирования практически не зависел от числа выбранных интервалов. В данных расчетах  $K = 40$ ,  $\Delta t_1 = 0.5$ . Для построения траекторий частиц использовалась программа ТРАЈЕСТ, разработанная М.В. Якововским в рамках выполнения проекта РФФИ, грант 02–01–00589.

Для визуализации траекторий выбирались 14 пробных частиц, которые в начальный момент времени помещались на входной границе канала и в области за уступом. Различные частицы окрашивались в разные цвета. Траектория частицы строилась до тех пор, пока она не покидала пределы расчетной области.

## 7.2. Осреднённые картины течений

Сглаживание по времени рассчитанных полей скорости осуществлялось в соответствии с осреднением, используемом в эксперименте методом PIV [20]. В каждой расчетной точке вычислялись значения компонент скорости

$$u_x^{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_x(t) dt, \quad u_y^{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_y(t) dt.$$

По полученным значениям, как и для мгновенных полей скорости, строилась функция тока (38). Эта процедура является корректной в силу коммутативности операций осреднения по времени и дифференцирования по пространству. Значения  $t_1$  и  $t_2$  указаны на рисунках.

## 7.3. Спектр пульсаций

Энергетический спектр пульсаций течения находился на основе зависимостей от времени компонент скорости  $u_x$  и  $u_y$ . Эти компоненты вычислялись в восьми точках расчетной области. Записи по времени выполнялись с интервалом  $\Delta t = 0.05$ . Чтобы пояснить идею фурье-анализа, представим компоненту скорости  $u_x$  в виде

$$u_x = \bar{u}_x + u_x',$$

где  $\bar{u}_x$  – среднее значение скорости,  $u_x'$  – ее пульсационная составляющая. Применим далее к  $u_x'$  дискретное преобразование Фурье, опуская для простоты штрих. Запишем пульсационную составляющую следующим образом:

$$u_x = \sum_{k=1}^{N/2} \left( \frac{a_{k+1}}{N} \cos \frac{2\pi lk}{N} + \frac{b_{k+1}}{N} \sin \frac{2\pi lk}{N} \right). \quad (\text{П.1})$$

Для построения спектра пульсаций вычислим коэффициенты Фурье по формулам

$$a_{k+1} = 2 \sum_{l=0}^{N-1} u_x^{l+1} \cos \frac{2\pi lk}{N}, \quad b_{k+1} = 2 \sum_{l=0}^{N-1} u_x^{l+1} \sin \frac{2\pi lk}{N}.$$

Здесь  $u_x^l$  – значение компоненты скорости  $u_x$  в точке  $i, j$  в момент времени  $l\Delta t$ ,  $N$  – число учитываемых записей по времени,  $k$  меняется от 1 до  $N/2$ . На основе вычисленных значений коэффициентов Фурье строится энерге-



тический спектр

$$E(k) = a_k^2 + b_k^2.$$

Максимальное значение  $k=N/2$  соответствует колебаниям с периодом  $\Delta t$ . Более высокочастотные колебания при выбранной частоте записей по времени не разрешаются. Однако для удовлетворительного разрешения колебания требуется по крайней мере 4–5 расчетных точек на период. Поэтому полученный спектр можно считать достоверным при  $k \leq N/8$ .

### Список литературы

1. Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 1997. С. 127–155.
2. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2000.
3. Sparrow E.M., Chuck W. PC solutions for heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel. // Numer. Heat Transfer. 1987. V. 12. P. 19–40.
4. Kim J., Moin P. Application of a fractional–step method to incompressible Navier–Stokes equations. // J. of Comput. Phys. 1985. V. 59. P. 308–323.
5. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward–facing step flow. // J. of Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 473–496.
6. Hackman L.P., Raithby G.D., Strong A.B. Numerical predictions of flows over backward–facing steps. // Intern. J. for Numer. Meth. In Fluids. 1984. V. 4, N 8. P. 711–724.
7. Nallasamy M. Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: a review. // Computers and Fluids. 1987. V. 15, N 2. P. 151–194.
8. Tong G.T. Modelling turbulent recirculating flows in complex geometries. Computational Techniques and Applications: CTAC–83, Ed. Noye J., Fletcher C. Elsevier Science Publishers B.V. (North–Holland), 1984. P. 653–668.
9. Speziale C.G., Ngo T. Numerical solution of turbulent flow past a backward facing step using a nonlinear  $k-\varepsilon$  model. // Int. J. Engng. Sci. 1988. V. 26, N 10. P. 1099–1112.
10. Thangam S., Speziale C.G. Turbulent flow past a backward–facing step: a critical evaluation of two–equation models. // AIAA Journal. 1992. V. 30,

- N 5. P. 1314–1320,
11. Lasher W.C., Taulbee D.B. On the computation of turbulent backstep flow. // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 1992. V. 13, N 1. P. 30–40.
  12. Fureby C. Large eddy simulation of rearward-facing step flow. // *AIAA Journal*. 1999. V. 37, N 11. P. 1401–1410.
  13. Armaly B.F., Li A., Nie J.H. Three-dimensional forced convection flow adjacent to backward-facing step. // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2002. V. 16, N 2. P. 222–227.
  14. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. // *Ж. вычисл. матем. и мат. физ.* 2001. Т. 41, N 2. С. 239–255.
  15. Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений. // *Матем. моделирование*. 1996. Т. 8, N 7. С. 33–44
  16. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля. // *Ж. вычисл. матем. и мат. физ.* 1998. Т. 38, N 10. С. 1732–1742.
  17. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999.
  18. Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.C., Chpoun A. Rarefied gas flow simulation based on quasigasdynamics equations. // *AIAA J.* 1995. V. 33, N 12. P. 2316–2324.
  19. B. Mate, T.G. Elizarova, I.A. Graur, I.A. Chirokov, G. Tajeda, J.M. Fernandez, S. Montero. Experimental and numerical investigation of an axisymmetric supersonic jet. // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 426. P. 177–197.
  20. Elizarova T.G., Kalachinskaya I.S., Weber R, Hureau J., Lengrand J.-C. (2001) Ecoulement derriere une marche. Etude experimentale et numerique. Laboratoire d'Aerothermique du CNRS, Orleans (Fr), R. 2001–1.
  21. Elizarova T.G., Kalachinskaya I.S., Weber R, Hureau J., Lengrand J.-C. Backward-facing step flow. Experimental and numerical approach. IUTAM Symposium "Unsteady separated flows". 8–12 April, Toulouse, France, 2002. Abstracts.
  22. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Наука, 1987.
  23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.