

УДК 519.634

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КУБИЧЕСКОЙ КАВЕРНЕ¹⁾

© 2003 г. Т. Г. Елизарова, О. М. Милюкова

(125047 Москва, Миусская пл., 4а, Ин-т матем. моделирования РАН)
e-mail: telizar@yahoo.com

Поступила в редакцию 22.02.02 г.
Переработанный вариант 30.05.02 г.

Излагаются результаты численного моделирования трехмерного течения вязкой несжимаемой изотермической жидкости в кубической каверне с подвижной верхней крышкой. В качестве математической модели используется система квазигидродинамических уравнений. Расчеты проводятся на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью. Подробно рассматривается параллельный вариант метода решения уравнения Пуассона. Приведены результаты расчетов для чисел Рейнольдса 100 и 1000 на последовательности сгущающихся сеток. Библ. 21. Фиг. 14. Табл. 1.

ВВЕДЕНИЕ

Перспективным направлением современной вычислительной гидродинамики является численное моделирование трехмерных нестационарных течений жидкости и газа. Реальная возможность моделирования вязких несжимаемых течений в пространственной постановке появилась в настоящее время как в связи с развитием численных методов расчета таких течений в так называемых естественных переменных – переменных “скорость–давление”, так и в связи с возможностями высокопроизводительной вычислительной техники на основе многопроцессорных систем [1].

Задача о течении жидкости в каверне является известным и достаточно сложным тестом для верификации и оценки эффективности численных методов расчета течений жидкости, однако опубликовано лишь небольшое число расчетов таких течений в пространственной постановке [2]–[5]. Для невысоких чисел Рейнольдса $Re < 1000$ течение является ламинарным и стационарным и представляет собой практически один большой вихрь с центром вблизи центра области. Течение в плоскости симметрии каверны является практически двумерным и хорошо описывается существующими двумерными моделями. В этом случае распределения скорости, полученные в расчетах по различным методикам, хорошо согласуются между собой и с данными натуральных экспериментов [6]. С ростом числа Рейнольдса структура течения быстро усложняется: при $Re \sim 2000$ течение становится стратифицированным, при более высоких скоростях – нестационарным, а затем турбулентным.

В данной работе для моделирования течения в каверне используется система квазигидродинамических (КГД) уравнений для описания течений вязкой несжимаемой жидкости [7], [8]. В [8] дан феноменологический вывод КГД-уравнений, проведен их анализ и построена серия точных аналитических решений этой системы. Тестирование КГД-уравнений на примере численного моделирования двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости приведено в [9]–[11]. По сравнению с традиционными уравнениями Навье–Стокса, КГД-уравнения для описания вязких несжимаемых течений имеют ряд преимуществ, что позволяет строить на их основе эффективные численные алгоритмы решения уравнений гидродинамики. А именно, дополнительные слагаемые, присутствующие в системе КГД-уравнений, имеют диссипативный характер, что обеспечивает регуляризацию счета при их численном решении. В КГД-системе естественным образом выписываются граничные условия для давления, необходимые для решения уравнения Пуассона. При аппроксимации КГД-уравнений на пространственной сетке значения скорости и давления в разностных уравнениях определяются в одних и тех же узлах разностной сетки, что позволяет избежать введения так называемых разнесенных пространственных сеток [12].

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 01-01-00061) и гранта INTAS № 2000-0617.

Расчет пространственных течений является трудоемкой вычислительной задачей, для реализации которой необходимо использовать мощные вычислительные комплексы. Описанный вычислительный алгоритм реализован для многопроцессорной вычислительной системы кластерного типа с распределенной памятью, в которой интерфейс обмена данными организован по принципу MPI (Message Passing Interface). Такой интерфейс применяется в настоящее время во всех крупных вычислительных комплексах, включающих от нескольких десятков до нескольких тысяч процессоров. Задача решается в переменной скорости–давление. При этом эффективность численного алгоритма в значительной степени определяется эффективностью решения уравнения Пуассона для давления. Поэтому в работе уделено особое внимание реализации численного метода решения уравнения Пуассона в (x, y, z) -геометрии на многопроцессорной вычислительной системе. Предложен параллельный вариант метода сопряженных градиентов спредобусловливанием модифицированного неполного разложения Холецкого без заполнения (MICCG(0)) (см. [13]) для решения второй краевой задачи.

Построенный алгоритм ориентирован на решение как стационарных, так и нестационарных задач на больших пространственных сетках. Приведены результаты расчетов течения в каверне на сетках с числом узлов по пространству, достигающим 4×10^6 , при числах Рейнольдса $Re = 100$ и $Re = 1000$. Для $Re = 1000$ продемонстрирована сходимость решения на последовательности сгущающихся сеток.

1. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Указанные в названии уравнения в приближении вязкой несжимаемой изотермической жидкости могут быть записаны в индексном виде следующим образом:

$$\nabla_i u^i = \nabla_i w^i, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + \nabla_i (u^i u^k) + \frac{1}{\rho} \nabla^k p = \nabla_i \Pi_{NS}^{ik} + \nabla_i (u^i w^k) + \nabla_i (w^i u^k). \quad (1.2)$$

Здесь по дважды повторяющимся индексам идет суммирование. Тензор вязких напряжений Навье–Стокса имеет вид $\Pi_{NS}^{ik} = \nu(\nabla^k u^i + \nabla^i u^k)$. Компоненты вектора плотности потока массы вычисляются по формулам

$$j^k = \rho(u^k - w^k), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

где

$$w^k = \tau \left(u^j \nabla_j u^k + \frac{1}{\rho} \nabla^k p \right). \quad (1.4)$$

В системе (1.1)–(1.4) использованы следующие обозначения: $\rho = \text{const} > 0$ – плотность жидкости, p – давление, отсчитываемое от гидростатического, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ – скорость, $\nu = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости, $\tau = \nu/c_s^2$ – характерный масштаб временного сглаживания, c_s – скорость звука.

КГД-уравнения отличаются от уравнений Навье–Стокса дополнительными дивергентными слагаемыми с параметром τ , имеющим размерность времени. При $\tau \rightarrow 0$ КГД-уравнения переходят в систему уравнений Навье–Стокса. В стационарном случае дополнительные дивергентные члены имеют формальные порядки $O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$. Приближением ламинарного пограничного слоя для КГД-уравнений служит классическая система уравнений Прандтля [7], [8]. В [8] построена серия точных аналитических решений КГД-уравнений. Во всех случаях при $\tau \rightarrow 0$ эти точные решения приближаются к соответствующим точным решениям системы Навье–Стокса. В этом смысле система КГД-уравнений аппроксимирует систему уравнений Навье–Стокса.

Сходимость численного решения КГД-уравнений к решению уравнений Навье–Стокса при уменьшении параметра τ для течений несжимаемой жидкости продемонстрирована в [9]–[11] на примере расчетов двумерных конвективных течений в прямоугольных плоскостях.

После приведения к безразмерному виду указанная система уравнений для плоских трехмерных изотермических течений имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x u_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = & \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z} + \frac{\partial(u_x w_z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z u_y)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_y)}{\partial z} + \frac{\partial(u_y w_z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial(u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\ & + \frac{\partial(u_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_y)}{\partial y} + 2 \frac{\partial(u_z w_z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} w_x &= \tau \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ w_y &= \tau \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ w_z &= \tau \left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Неизвестными величинами являются компоненты вектора скорости $u_x = u_x(x, y, z, t)$, $u_y = u_y(x, y, z, t)$, $u_z = u_z(x, y, z, t)$ и давление $p = p(x, y, t)$.

Поле давления находится по уже известному полю скорости путем решения уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = & \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

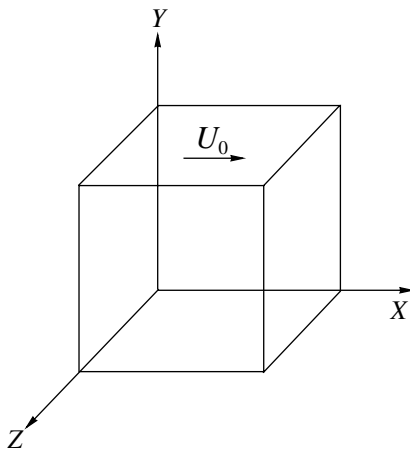
являющегося эквивалентным представлением (1.5) при $\tau = \text{const}$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоское пространственное (трехмерное) течение изотермической жидкости в кубической камере с ребром H . Верхняя крышка камеры движется с постоянной скоростью U_0 . Схема расчетной области и используемая система координат приведены на фиг. 1.

Такое течение будем описывать системой уравнений (1.6)–(1.10), которая приведена к безразмерному виду с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}H, \quad y = \tilde{y}H, \quad z = \tilde{z}H, \quad u_x = \tilde{u}_x U_0, \quad u_y = \tilde{u}_y U_0, \quad u_z = \tilde{u}_z U_0, \\ p &= \tilde{p} \rho U_0^2, \quad t = (\tilde{t}H)/U_0, \quad \text{Re} = (U_0 H)/\nu. \end{aligned}$$



Фиг. 1.

Систему (1.6)–(1.10) дополним граничными условиями. На неподвижной твердой поверхности для скорости используются условия прилипания

$$\mathbf{u} = 0.$$

На поверхности $y = 1$ задаются условия $u_x = U_0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$. Граничные условия для давления следуют из условия непротекания и имеют вид

$$\partial p / \partial \mathbf{n} = 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности. Так, например, на грани $x = 0$ имеем $\partial p / \partial x = 0$, на ребре $x = 0$, $y = 0$ условие (2.1) приводит к равенствам $\partial p / \partial x = 0$, $\partial p / \partial y = 0$. В вершине $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ имеем $\partial p / \partial x = 0$, $\partial p / \partial y = 0$, $\partial p / \partial z = 0$.

В качестве начального условия выбиралось состояние покоя $u_x = u_y = u_z = 0$. Давление в начальный момент считалось постоянным во всем поле течения: $p = 0$. Для устранения неоднозначности при вычислении давления его значение во время расчета поддерживалось постоянным $p(1, 1, 1) = 1$ в вершине куба с координатами (1, 1, 1).

Дополнительные слагаемые с множителем τ рассматривались как регуляризаторы. В численных расчетах значение параметра τ варьировалось и выбиралось исходя из условий точности и устойчивости алгоритма. В настоящей работе использовалось $\tau = 0.01$ для $Re = 100$ и $\tau = 0.001$ для $Re = 1000$, что, как показывает практика двумерных расчетов аналогичных задач [9], [10], обеспечивает достаточную устойчивость и точность вычислительного алгоритма.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного решения системы уравнений (1.6)–(1.10) используется метод конечных разностей. Вводится равномерная сетка по всем пространственным направлениям с шагом h . Все величины вычисляются в узлах разностной сетки. Граница пространственной области располагается в полуцелых узлах сетки, т.е. шаг по пространству вблизи границы области равен $h/2$. Все пространственные производные аппроксимируются центральными разностями. Производные первого порядка вычислялись как

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{h} \left(\frac{f_{i+1,j,k} + f_{ijk}}{2} - \frac{f_{ijk} + f_{i-1,j,k}}{2} \right).$$

Производные второго порядка аппроксимируются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{h} \left(k_{i+0.5,j,k} \frac{f_{i+1,j,k} - f_{ijk}}{2} - k_{i-0.5,j,k} \frac{f_{ijk} - f_{i-1,j,k}}{2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{h} \left(k_{i+0.5,j,k} \frac{f_{i+0.5,j+0.5,k} - f_{i+0.5,j-0.5,k}}{h} - k_{i-0.5,j,k} \frac{f_{i-0.5,j-0.5,k} - f_{i-0.5,j+0.5,k}}{h} \right),$$

где $k_{i \pm 0.5,j,k} = 0.5(k_{i \pm 1,j,k} + k_{ijk})$, $f_{i \pm 0.5,j \pm 0.5,k} = 0.25(f_{i \pm 1,j \pm 1,k} + f_{ijk} + f_{i \pm 1,j,k} + f_{i,j \pm 1,k})$; таким образом значения величин в полуцелых узлах определяются как полусуммы их значений в целых узлах, а значения функций в центрах граней трехмерных ячеек, которые требуются для вычисления смешанных производных, вычисляются как среднее арифметическое значений величин в прилегающих узлах. Аналогично аппроксимируются производные $\partial f / \partial y$, $\partial f / \partial z$, $(\partial / \partial y)(k \partial f / \partial y)$, $(\partial / \partial z)(k \partial f / \partial z)$, $(\partial / \partial x)(k \partial f / \partial z)$, $(\partial / \partial y)(k \partial f / \partial x)$, $(\partial / \partial y)(k \partial f / \partial z)$, $(\partial / \partial z)(k \partial f / \partial x)$, $(\partial / \partial z)(k \partial f / \partial y)$.

Аппроксимация граничных условий для скорости осуществляется со вторым порядком точности, что достигается введением фиктивных узлов по внешним границам области. Граничные условия для давления аппроксимируются со вторым порядком точности с помощью экстраполяции уравнения Пуассона на границу области. Так, например, условие $\partial p / \partial x = 0$ на грани $x = 0$ приводит к уравнению

$$-0.5p_{1,j-1,k} - 0.5p_{1,j,k-1} + 3p_{1jk} - p_{2jk} - 0.5p_{1,j+1,k} - 0.5p_{1,j,k+1} = 0,$$

а условия $\partial p/\partial x = 0, \partial p/\partial y = 0$ на ребре $x = 0, y = 0$ – к уравнению

$$-0.25 p_{1,1,k-1} + 1.5 p_{11k} - 0.5 p_{21k} - 0.5 p_{12k} - 0.25 p_{1,1,k+1} = 0.$$

Для вершины $x = 0, y = 0, z = 0$ имеем

$$0.75 p_{111} - 0.25 p_{211} - 0.25 p_{121} - 0.25 p_{112} = 0.$$

Аналогичные уравнения выписываются для других узлов сетки на границе области. В точке $x = 1, y = 1, z = 1$ полагаем $p_{N_1, N_2, N_3} = 1$, где N_1, N_2, N_3 – количество узлов сетки по направлениям x, y, z соответственно.

Для решения трехмерного разностного уравнения для давления $Au = f$ использовался метод сопряженных градиентов с предобуславливанием модифицированного неполного разложения Холецкого без заполнения (MICCG(0)) (см. [13]) или его параллельный вариант, предложенный ниже в разд. 4 настоящей статьи. Итерации прекращались при выполнении условия $(Au^l - f, Au^l - f) < \epsilon^2$, где $\epsilon = 0.00001, l$ – номер итерации.

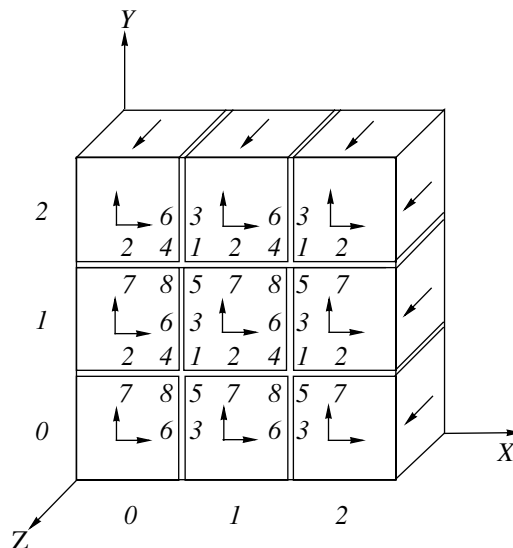
Поле скорости определяется на следующем временном слое по явной схеме с шагом Δt . Течение считается установившимся, если

$$\max_{ijk} \left(\frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{\Delta t} \right)_{ijk} < 0.001, \quad \max_{ijk} \left(\frac{u_y^{n+1} - u_y^n}{\Delta t} \right)_{ijk} < 0.001, \quad \max_{ijk} \left(\frac{u_z^{n+1} - u_z^n}{\Delta t} \right)_{ijk} < 0.001.$$

Этот алгоритм является обобщением предложенного в [9]–[11] алгоритма решения задачи в двумерной постановке.

4. АЛГОРИТМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Для параллельной реализации решения разностных уравнений, аппроксимирующих систему (1.6)–(1.10), будем использовать подход, называемый декомпозицией области, или геометрическим параллелизмом. Разобьем трехмерную область расчета на $p = p_1 \times p_2$ подобластей в двух пространственных направлениях OX и OY , как изображено на фиг. 2 для случая $p_1 = p_2 = 3$, и организуем вычислительную систему из $p = p_1 \times p_2$ процессоров. Каждый процессор будет осуществлять вычисления в своей геометрической подобласти.



Фиг. 2.

Алгоритм параллельной реализации решения уравнений явной разностной схемы для системы (1.6)–(1.8) аналогичен изложенному в [14]. Перед вычислением $(u_x)_{ijk}^{n+1}$, $(u_y)_{ijk}^{n+1}$, $(u_z)_{ijk}^{n+1}$ – значений компонент скорости на $(n+1)$ временном слое происходит пересылка значений $(u_x)_{ijk}^n$, $(u_y)_{ijk}^n$, $(u_z)_{ijk}^n$, P_{ijk}^n в граничных узлах соседних подобластей, расположенных на плоскостях 2, 3 и на линиях 1, которые необходимы для вычисления сеточных функций в граничных точках подобластей на линиях 4, 5 и плоскостях 6, 7. Пересылки осуществляются массивами.

Решение разностного аналога уравнения (1.10)

$$-a_{ijk}y_{i-1,j,k} - b_{ijk}y_{i,j-1,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1} + c_{ijk}y_{ijk} - a_{i+1,j,k}y_{i+1,j,k} - b_{i,j+1,k} - g_{i,j,k+1}y_{i,j,k+1} = f_{ijk},$$

где $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, k = 1, 2, \dots, N_3 - 1$, или уравнения $Au = f$ на однопроцессорной ЭВМ будем производить методом МСССГ(0). Этот метод требует для сходимости $O(\ln(2/\epsilon) \sqrt{N_h})$ итераций, где N_h – число узлов разностной сетки по одному пространственному направлению, ϵ – требуемая относительная точность. Основная трудность распараллеливания метода МСССГ(0) связана с рекурсивным характером вычислений при обращении матрицы предобусловливания. Для ее преодоления используем подход, основанный на переупорядочении узлов сетки и реконструировании матрицы предобусловливания [15]–[20].

Матрица предобусловливания параллельного вариант МСССГ(0) будет иметь вид

$$B = (D^{-1} + A_1)D[D^{-1} + (A_1)^T],$$

где матрица A_1 задает оператор \hat{A}_1 , действующий в пространстве сеточных функций, определенных на множестве узлов разностной сетки:

$$(\hat{A}_1 y)_{ijk} = \begin{cases} -a_{ijk}y_{i-1,j,k} - b_{ijk}y_{i,j-1,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_0, \\ -g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_1, \\ -a_{ijk}y_{i-1,j,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_2, \\ -b_{ijk}y_{i,j,k-1} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_3, \\ -a_{ijk}y_{i-1,j,k} - a_{i+1,j,k}y_{i+1,j,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_4, \\ -b_{ijk}y_{i,j-1,k} - b_{i,j+1,k}y_{i,j+1,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_5, \\ -a_{ijk}y_{i-1,j,k} - a_{i+1,j,k}y_{i+1,j,k} - b_{ijk}y_{i,j-1,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_6, \\ -b_{ijk}y_{i,j-1,k} - b_{i,j+1,k}y_{i,j+1,k} - a_{ijk}y_{i-1,j,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_7, \\ -a_{ijk}y_{i-1,j,k} - b_{ijk}y_{i,j-1,k} - a_{i+1,j,k}y_{i+1,j,k} - b_{i,j+1,k}y_{i,j+1,k} - g_{ijk}y_{i,j,k-1}, & (i, j, k) \in \omega_8, \end{cases}$$

Здесь ω_0 – множество внутренних узлов сетки всех подобластей, $\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7$ – множества узлов сетки, расположенных на плоскостях 2, 3, 6, 7, $\omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_8$ – множества узлов сетки, расположенных на линиях 1, 4, 5, 8 (см. фиг. 2).

Элементы d_{ijk} диагональной матрицы D определяются из условия $Ae + GD_A e = Be$, где $e = (1, \dots, 1)^T$, D_A – диагональная часть матрицы A , G – диагональная матрица с диагональными элементами σ_{ijk} :

$$\sigma_{ijk} = \begin{cases} \xi_\alpha h + \xi_0 h^2, & \text{если } (i, j, k) \in \omega_\alpha, \text{ для } \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, \\ \xi_0 h^2 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

здесь $\xi_\alpha > 0$ для $0 \leq \alpha \leq 5$. Будем использовать

$$\tilde{\xi}_1 = 2\pi/3, \quad \tilde{\xi}_2 = \tilde{\xi}_3 = \tilde{\xi}_4 = \tilde{\xi}_5 = \pi/3, \quad \tilde{\xi}_0 = 0.5\pi^2. \quad (4.1)$$

Элементы d_{ijk} диагональной матрицы D вычисляются по формулам

$$d_{ijk}^{-1} = \begin{cases} \tilde{c}_{ijk} - a_{ijk}(a_{ijk} + b_{i-1,j,k} + \kappa_i^1 a_{i-1,j,k} + g_{i-1,j,k+1})d_{i-1,j,k} - \\ - b_{ijk}(b_{ijk} + a_{i+1,j-1,k} + \kappa_j^2 b_{i,j-1,k} + g_{i,j-1,k+1})d_{i,j-1,k} - \\ - g_{ijk}(g_{ijk} + a_{i+1,j,k-1} + b_{i,j+1,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_0, \\ \tilde{c}_{ijk} - g_{ijk}(g_{ijk} + a_{i+1,j,k-1} + a_{i,j,k-1} + b_{i,j+1,k-1} + b_{i,j,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_1, \\ \tilde{c}_{ijk} - a_{ijk}(a_{ijk} + b_{i-1,j,k} + b_{i-1,j+1,k} + \kappa_i^1 a_{i-1,j,k} + g_{i-1,j,k+1})d_{i-1,j,k} - \\ - g_{ijk}(g_{ijk} + a_{i+1,j,k-1} + b_{i,j+1,k-1} + b_{i,j,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_2, \\ \tilde{c}_{ijk} - b_{ijk}(b_{ijk} + a_{i+1,j-1,k} + a_{i,j-1,k} + \kappa_j^2 b_{i,j-1,k} + g_{i,j-1,k+1})d_{i,j-1,k} - \\ - g_{ijk}(g_{ijk} + a_{i+1,j,k-1} + a_{i,j,k-1} + b_{i,j+1,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_3, \\ \tilde{c}_{ijk} - a_{ijk}(a_{ijk} + b_{i-1,j,k} + b_{i-1,j+1,k} + g_{i-1,j,k+1})d_{i-1,j,k} - \\ - a_{i+1,j,k}(a_{i+1,j,k} + b_{i+1,j,k} + b_{i+1,j+1,k} + a_{i+2,j,k} + g_{i+1,j,k+1})d_{i+1,j,k} - \\ - g_{ijk}(g_{ijk} + b_{i,j+1,k-1} + b_{i,j,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_4, \\ \tilde{c}_{ijk} - b_{ijk}(b_{ijk} + a_{i,j-1,k} + a_{i+1,j-1,k} + g_{i,j-1,k+1})d_{i,j-1,k} - \\ - b_{i,j+1,k}(b_{i,j+1,k} + a_{i+1,j+1,k} + a_{i,j+1,k} + b_{i,j+2,k} + g_{i,j+1,k+1})d_{i,j+1,k} - \\ - g_{ijk}(g_{ijk} + a_{i+1,j,k-1} + a_{i,j,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_5, \\ \tilde{c}_{ijk} - a_{ijk}(a_{ijk} + b_{i-1,j+1,k} + g_{i-1,j,k})d_{i-1,j,k} - b_{ijk}(b_{ijk} + \\ + \kappa_j^2 b_{i,j-1,k} + g_{i,j-1,k+1})d_{i,j-1,k} - a_{i+1,j,k}(a_{i+1,j,k} + b_{i+1,j+1,k} + \\ + a_{i+2,j,k} + g_{i+1,j,k+1})d_{i+1,j,k} - g_{ijk}(g_{ijk} + b_{i,j+1,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_6, \\ \tilde{c}_{ijk} - b_{ijk}(b_{ijk} + a_{i+1,j-1,k} + g_{i,j-1,k+1})d_{i,j-1,k} - a_{ijk}(a_{ijk} + \\ + \kappa_i^1 a_{i-1,j,k} + g_{i-1,j,k+1})d_{i-1,j,k} - b_{i,j+1,k}(b_{i,j+1,k} + a_{i+1,j+1,k} + \\ + b_{i,j+2,k} + g_{i,j+1,k+1})d_{i,j+1,k} - g_{ijk}(g_{ijk} + a_{i+1,j,k-1})d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_7, \\ \tilde{c}_{ijk} - a_{ijk}(a_{ijk} + g_{i-1,j,k+1})d_{i-1,j,k} - b_{ijk}(b_{ijk} + g_{i,j-1,k+1})d_{i,j-1,k} - \\ - a_{i+1,j,k}(a_{i+1,j,k} + a_{i+2,j,k} + g_{i+1,j,k+1})d_{i+1,j,k} - b_{i,j+1,k}(b_{i,j+1,k} + \\ + b_{i,j+2,k} + g_{i,j+1,k+1})d_{i,j+1,k} - g_{ijk}^2 d_{i,j,k-1}, \quad (i, j, k) \in \omega_8, \end{cases}$$

где $\tilde{c}_{ijk} = c_{ijk}(1 + \sigma_{ijk})$,

$$\kappa_i^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } i = M_1 k_1 + 1, \quad 1 \leq k_1 \leq p_1 - 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\kappa_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } j = M_2 k_2 + 1, \quad 1 \leq k_2 \leq p_2 - 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$M_\alpha = N_\alpha/p_\alpha$, $k_1 = [i/M_1]$, $k_2 = [j/M_2]$, $[l]$ – целая часть l , (k_1, k_2) – номер подобласти, $0 \leq k_\alpha \leq p_\alpha - 1$, $\alpha = 1, 2$.

Рассуждая аналогично [19], можно доказать, что для сходимости параллельного варианта MICCG(0) требуется $O(\ln(2/\varepsilon) \sqrt{N_h})$ итераций для любых фиксированных p_1 и p_2 . Для достаточно больших p_1, p_2 для сходимости требуется $O(\ln(2/\varepsilon) \sqrt{N_h} \max(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}))$ итераций. Как показали теоретические исследования и расчеты, число итераций медленно растет с ростом числа процессоров. Заметим, что значения ξ_α , приведенные в (4.1), минимизируют оценку числа итераций па-

раллельного варианта MICCG(0) для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. При параллельной реализации вычисления значений d_{ijk} расчет начинается во всех процессорах одновременно с линий 1 (см. фиг. 2), затем продолжается на плоскостях 2, 3 во внутренних точках подобластей. Далее происходит пересылка значений d_{ijk} на плоскостях 2, 3 и линиях 1 в соседние процессоры. Затем расчет продолжается на линиях 4, 5 и плоскостях 6, 7 и завершается на линиях 8. Перед расчетом d_{ijk} на линиях 8 вновь осуществляется пересылка значений d_{ijk} на соответствующих линиях 4 и 5 из соседних процессоров. Вычисления происходят в направлениях, указанных стрелками на фиг. 2. Все пересылки осуществляются массивами. Аналогично происходит параллельная реализация обоих этапов $(D^{-1} + A_1)\bar{w}_k = Ay^k - f$, $[D^{-1} + (A_1)^T]w^k = D^{-1}w^k$ обращения матрицы B на каждой итерации k . Распараллеливание остальных этапов в алгоритме предобусловленного метода сопряженных градиентов происходит аналогично рассмотренному в [18] для двумерных задач.

Отметим, что решение уравнения Пуассона для определения давления занимает большую часть времени счета, которая может составлять от 60% до 90% от общего времени решения задачи, в зависимости от требуемого числа итераций. Поэтому эффективность распараллеливания всего алгоритма определяется эффективностью распараллеливания решения уравнения Пуассона.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Задача о течении в кубической каверне с подвижной крышкой решалась при числах Рейнольдса $Re = 100$, $Re = 1000$ на равномерных пространственных сетках с одинаковым числом узлов по всем трем направлениям $N_1 = N_2 = N_3 = N_h$. При $Re = 100$ использовались сетки с числом узлов $N_h = 22$ и $N_h = 42$, при $Re = 1000$ число вычислительных узлов сетки по пространству составляло $N_h = 42$, $N_h = 82$ и $N_h = 162$. Величина шага по времени Δt , с которым производился расчет, номер шага n и момент времени t , соответствующий установлению стационарного течения, приведены в таблице. Вычисления производились на вычислительном комплексе МВС-1000М на одном процессоре для сетки с числом узлов $N_h = 22$, на четырех процессорах в случае сетки с $N_h = 42$, на 16 процессорах для сетки с $N_h = 82$ и на 25 процессорах, если $N_h = 162$.

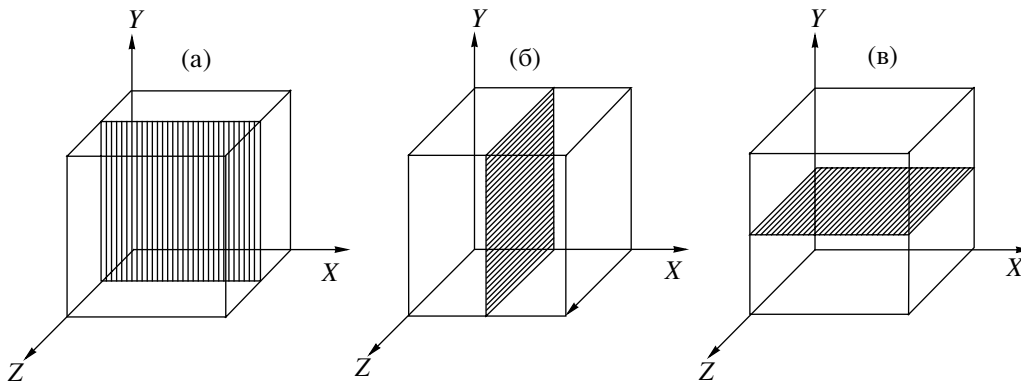
Для варианта $Re = 1000$ при $N_h = 82$ приведено время счета задачи с ростом числа процессоров. Расчет течения проводился на 50 временных слоях. Время счета на четырех процессорах составляло 21.18 мин, на 16 процессорах 5.69 мин, на 25 процессорах 4.10 мин. Дальнейшее увеличение числа процессоров в случае $N_h = 82$ оказывалось нецелесообразным. Практика расчетов показывает, что увеличение числа используемых процессоров становится оправданным для большего числа расчетных точек.

Известно, что с ростом числа расчетных точек эффективность распараллеливания алгоритма на заданное число процессоров растет, в то же время с ростом числа процессоров при фиксированном числе расчетных точек эта эффективность падает (см. [14], [17]). Если требуется проводить расчеты на более подробных сетках и на большем числе процессоров, то для распараллеливания алгоритма метода MICCG(0) следует использовать другие способы упорядочения неизвестных или решать эллиптическое уравнение параллельным вариантом попеременно-треугольного метода для трехмерных задач [21] с регуляризатором.

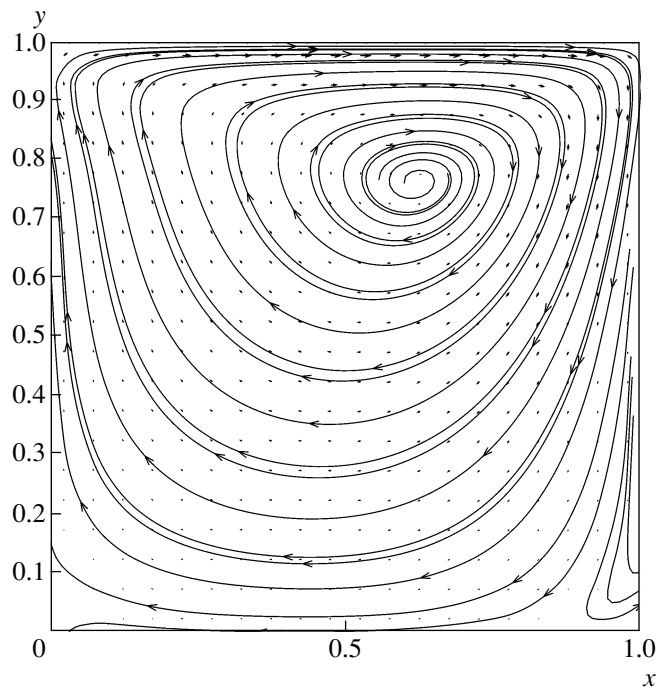
На последующих рисунках приведены линии тока и распределения компонент скорости в трех центральных сечениях каверны с координатами $z = 0.5$ (фиг. 3а), $x = 0.5$ (фиг. 3б) и $y = 0.5$ (фиг. 3в). В данной задаче сечение $z = 0.5$ представляет собой плоскость симметрии. На фиг. 4–6 представлены картины течения жидкости в указанных сечениях, полученные для числа $Re = 100$ на сетке $N_h = 22$, а именно компоненты скорости u_x , u_y и линии тока в сечении $z = 0.5$ на фиг. 4,

Таблица

Re	N_h	Δt	n	t
100	22	0.002	3764	7.53
	42	0.0025	3038	7.59
1000	42	0.001	29666	29.67
	82	0.002	16329	32.66
	162	0.002	16428	32.86



Фиг. 3.



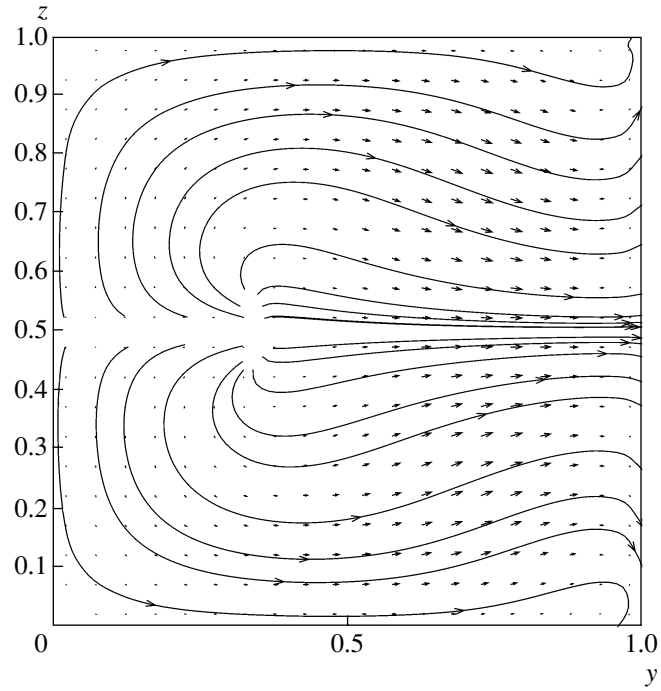
Фиг. 4.

компоненты скорости u_y, u_z и линии тока в сечении $x = 0.5$ на фиг. 5, компоненты скорости u_x, u_z и линии тока в сечении $y = 0.5$ на фиг. 6. В этом случае компоненты скорости в направлении z малы и, несмотря на сложную картину течения в области, в плоскости симметрии $z = 0.5$ видно хорошее совпадение с результатами расчетов этой задачи в двумерной подстановке [9]. В указанных сечениях результаты расчета задачи на сетках с $N = 22$ и $N = 42$ очень близки.

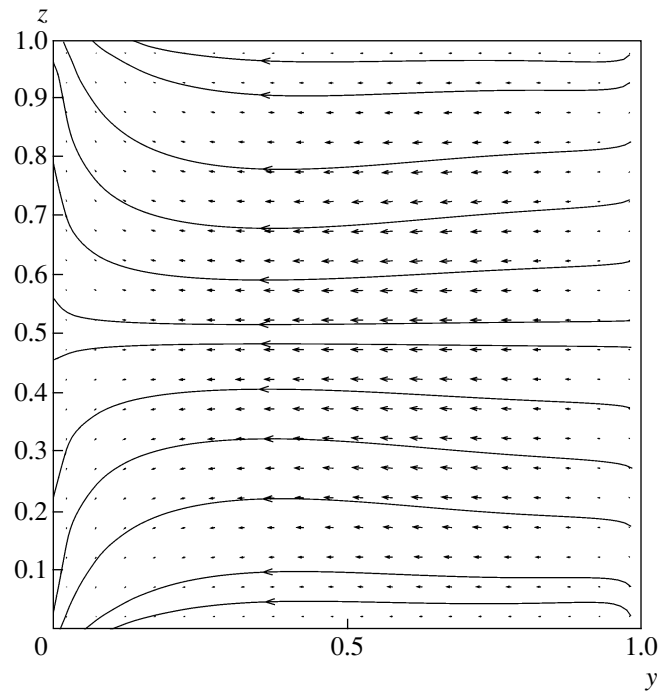
На фиг. 7–9 представлены линии тока в аналогичных сечениях для числа $Re = 1000$ на сетке $N_h = 82$. В двух последних сечениях с ростом числа Re видно существенное усложнение картины течения, связанное с образованием дополнительных источников и стоков в этих плоскостях. При дальнейшем росте числа Re течение разбивается на несколько вихревых ячеек, которые при дальнейшем увеличении скорости подвижной крышки становятся неустойчивыми.

Для $Re = 100$ и 1000 картины растекания жидкости на донной ($y \approx 0$), боковой ($z \approx 0$ и $z \approx 1$), передней ($x \approx 1$) и задней ($x \approx 0$) гранях каверны практически идентичны представленным в работе [4].

На фиг. 10–14 для $Re = 1000$ представлены одномерные распределения компонент скоростей, рассчитанные на последовательности сгущающихся сеток. Сплошные линии соответствуют рас-



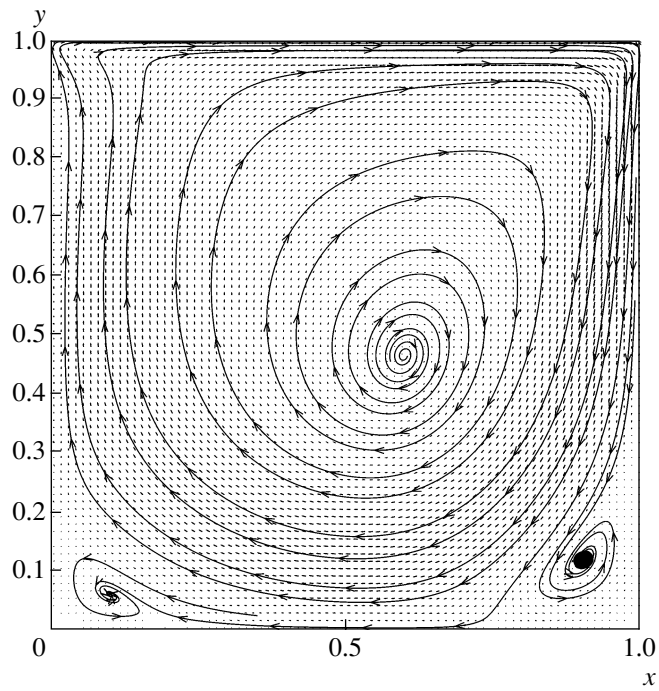
Фиг. 5.



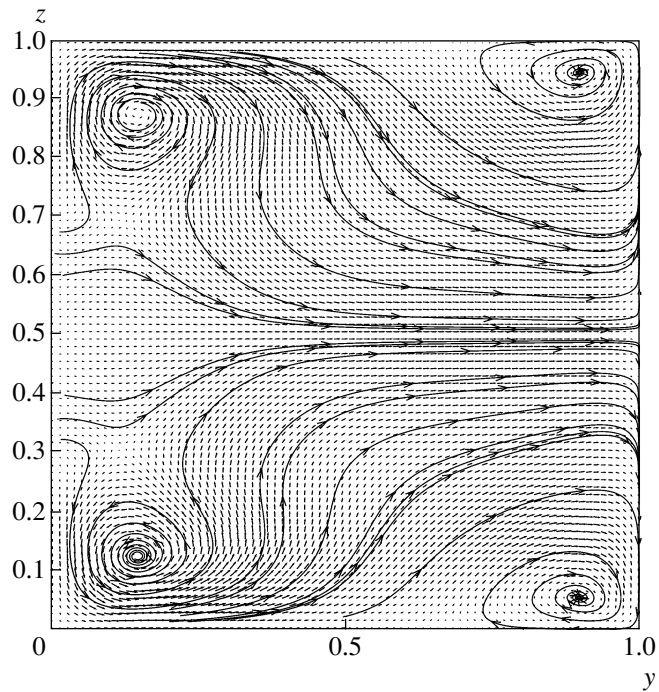
Фиг. 6.

четам с $N_h = 162$, штриховые – расчетам с $N_h = 82$, штрихпунктир – расчетам с $N_h = 42$. Наглядно прослеживается сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки.

В частности, на фиг. 10, 11 представлены распределения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости в плоскости симметрии каверны соответственно для $u_x(y)$ при $z = 0.5$, $x = 0.5$ и $u_y(x)$ при $z = 0.5$, $y = 0.5$. Указанные распределения, полученные на сетке $N_h = 82$, хорошо соответствуют приведенным в [2] и [4], рассчитанными на неравномерных сгущающихся к границам об-

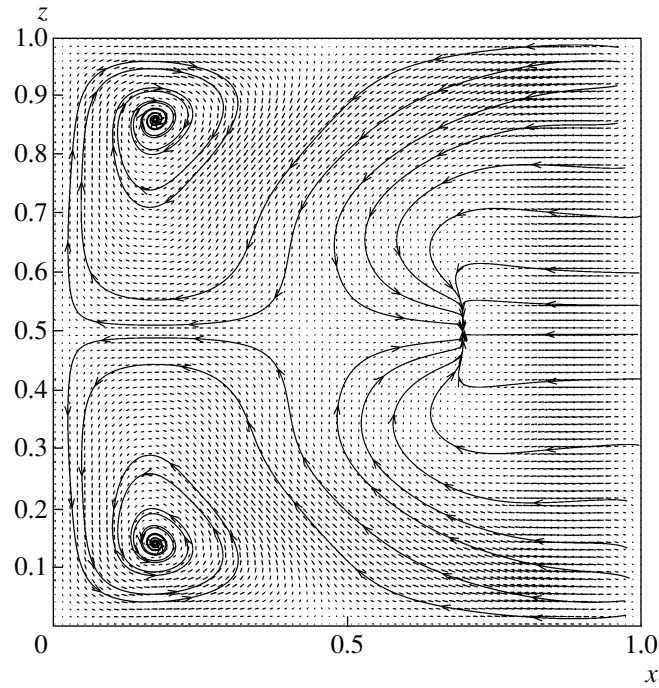


Фиг. 7.

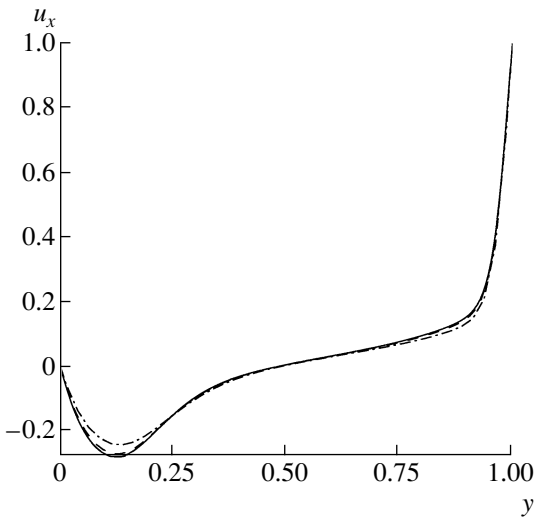


Фиг. 8.

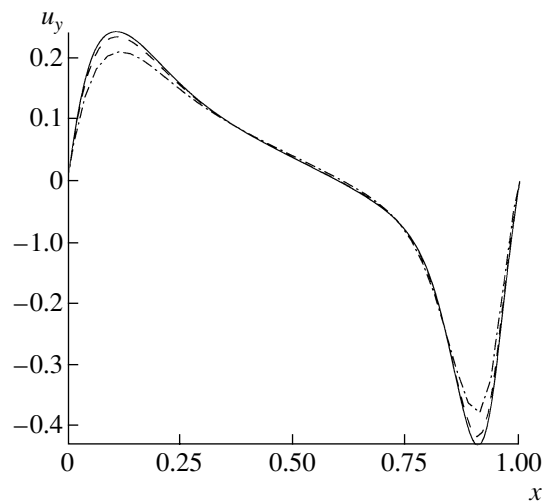
ласти сетках с числом узлов $\sim 6 \times 10^4$. На фиг. 12–14 представлены зависимости u_x , u_y и u_z от z при $x = 0.5$, $y = 0.5$. Видно, что проекции скоростей в направлении z на порядок меньше, чем проекции скоростей в плоскости симметрии задачи. Величины скорости в направлении z сильнее зависят от шага пространственной сетки, чем скорости в плоскости симметрии.



Фиг. 9.



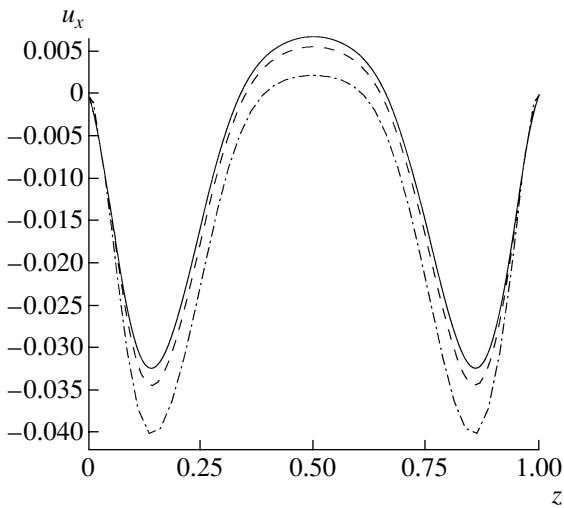
Фиг. 10.



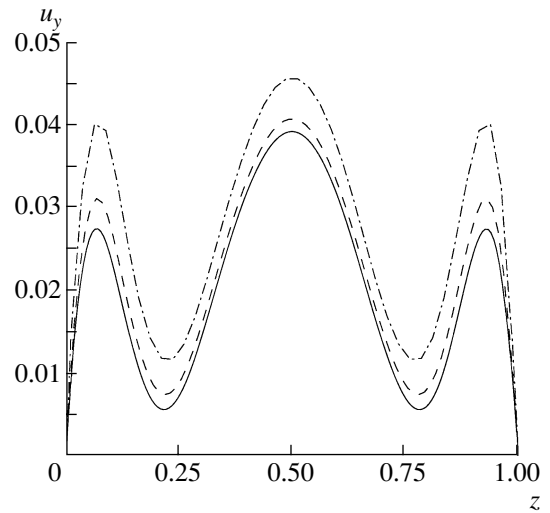
Фиг. 11.

Приведенные одномерные графики могут использоваться для количественного сопоставления результатов расчета задачи о течении в трехмерной каверне, полученных на основе различных численных алгоритмов.

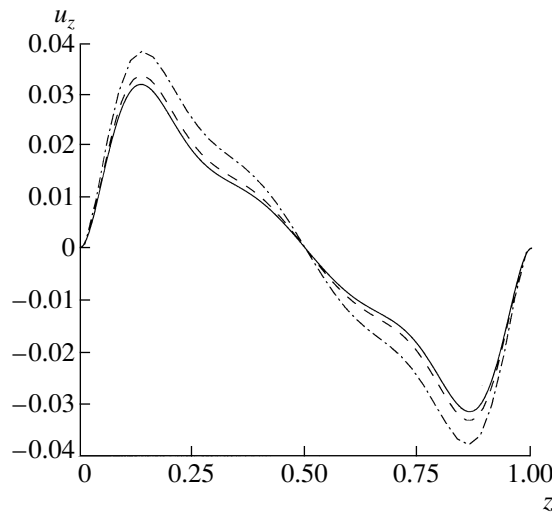
Заметим, что численный алгоритм решения уравнений Навье–Стокса, имеющий общие черты с описанным выше, был применен в работах А.И. Федосеева [5] для расчета ряда течений, в том числе стационарного течения в каверне при больших числах Рейнольдса вплоть до $Re = 4000$. Основная идея этого алгоритма заключалась в регуляризации уравнения неразрывности системы Навье–Стокса путем приведения его к виду (1.1), где компоненты вектора \mathbf{w} вычислялись как $w^k = \tau \nabla^k p$. Все остальные уравнения Навье–Стокса записывались в традиционном виде, без изменений. На твердой стенке использовалось граничное условие для давления вида $\partial p / \partial n = 0$. Этот



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

подход позволил эффективно моделировать рассмотренные течения на достаточно грубых сетках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены результаты численного моделирования пространственных течений в каверне на основе системы КГД-уравнений, записанной в эйлеровой системе координат. Для решения полученной в результате аппроксимации разностной системы уравнений предложен алгоритм параллельной реализации, который позволил эффективно решить задачу на кластерной вычислительной системе. Для решения второй краевой задачи для трехмерного уравнения Пуассона предложен и реализован параллельный вариант метода MICCG(0). Приведены результаты расчетов для чисел Рейнольдса $Re = 100$ и 1000 . Полученные численные результаты сопоставлены с имеющимися в литературе данными. Продемонстрирована сходимость численного решения по сетке.

Приведенные результаты могут использоваться для тестирования численных алгоритмов расчета трехмерных течений. Построенный алгоритм позволит за реальное время проводить расчеты трехмерных нестационарных течений в прямоугольных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортон В.Е., Левин В.К., Савин Г.И., Забродин А.В. и др. Суперкомпьютер МВС-1000М и перспективы его применения // информационно-аналитич. журнал Наука и пром-сть России. 2001. № 11(55). С. 49–52.
2. Похилко В.И. О решении уравнения Навье–Стокса в кубической каверне: Препринт № 11. М.: ИММ РАН, 1994.
3. Исаев С.А., Лучко Н.Н., Судаков А.Г., Сидорович Т.В. Численное моделирование ламинарного циркуляционного течения в квадратной каверне с подвижной границей при высоких числах Рейнольдса // Инж.-физ. журнал. 2002. Т. 75. № 1. С. 54–60.
4. Исаев С.А., Лучко Н.Н., Судаков А.Г. и др. Численное моделирование ламинарного циркуляционного течения в кубической каверне с подвижной гранью // инж.-физ. журнал. 2002. Т. 75. № 1. С. 49–53.
5. Fedoseyev A.I. A regularization approach to solving the Navier–Stokes equations for problems with boundary layer // Comput. fluid Dynamic J. 2001. V. 9. Special number (<http://uahtitan.uah.edu/alex/>).
6. Косефф Дж.Р., Стрит Р.Л. О влиянии торцевых стенок на течение в каверне с движущейся крышкой // Теор. основы инж. расчетов. 1984. Т. 106. № 4. С. 299–308.
7. Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1997. С. 127–155.
8. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течения жидкости и газа на основе квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
9. Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // Матем. моделирование. 1999. Т. 8. № 7. С. 33–44.
10. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1732–1742.
11. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 2. С. 239–255.
12. Handbook of computational fluid mechanics / Ed. R. Peyret. London etc.: Acad. Press, 2000.
13. Gustafsson I. A class of first order factorization methods // BIT. 1978. V. 18. P. 142–156.
14. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999.
15. Duff I.S., Meurant G.A. The effect of ordering on preconditioned conjugate gradient // BIT. 1989. V. 29. P. 635–657.
16. Duff I.S., van der Vorst H.A. Developments and trends in parallel solution of linear systems // Parallel Computing. 1999. V. 25. P. 1931–1970.
17. Милюкова О.Ю., Четверушкин Б.Н. Параллельный вариант попеременно-треугольного метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 2. С. 228–238.
18. Милюкова О.Ю. Параллельный вариант обобщенного попеременно-треугольного метода для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 12. С. 2002–2012.
19. Милюкова О.Ю. Параллельный итерационный метод с факторизованной матрицей предобуславливания для решения эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 953–962.
20. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
21. Милюкова О.Ю. Параллельные варианты попеременно-треугольного метода для решения трехмерных эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 36. № 10. С. 1472–1481.