УДК 517.958:533.7

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСХОДА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В МИКРОКАНАЛЕ

Т. Г. Елизарова*), Д. Г. Ершов

(*кафедра математики*)

E-mail: telizar@afrodita.phys.msu.ru

Построены приближенные формулы для вычисления расхода газа в длинных изотермических микроканалах. Показано, что квазигазодинамические уравнения с условиями скольжения Максвелла предсказывают существование минимума расхода в канале — так называемого минимума Кнудсена. Предложены поправки, позволяющие выписать приближенные формулы для расхода, справедливые во всем диапазоне чисел Кнудсена.

Введение

Эксперименты Кнудсена, выполненные в начале 1900-х гг., показывают наличие минимума удельного расхода газа для течений в длинных изотермических каналах при числах Кнудсена порядка 0.2 (так называемый эффект, или минимум, Кнудсена) [1, 2]. Возможность описания этого эффекта с помощью различных теоретических моделей интересует исследователей и до сих пор. При использовании кинетических подходов эффект Кнудсена был получен в целом ряде работ. В частности, в [2–5] эта задача решалась с помощью вариационных подходов к решению уравнения Больцмана в БГК приближении и уравнений Барнетта.

В работе [6] было показано, что квазигидродинамические уравнения с граничными условиями скольжения Максвелла для скорости позволяют описать течения газа в микроканалах вплоть до чисел Кнудсена порядка единицы. В настоящей работе на основе указанного подхода построены приближенные аналитические формулы, описывающие эффект Кнудсена. Предложены поправки, позволяющие выписать приближенные формулы для расхода в плоских и цилиндрических каналах, справедливые во всем диапазоне чисел Кнудсена.

Уравнения газовой динамики и течение Пуазейля

Система уравнений газовой динамики может быть записана в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}_m = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\boldsymbol{j}_m\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = \operatorname{div}(\Pi \cdot \boldsymbol{u}). \tag{3}$$

Здесь использованы обычные обозначения. Символы $\otimes$ и $\cdot$ обозначают прямое тензорное и скалярное произведение соответственно. При вычислении дивергенции от диадного произведения $(\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u})$ оператор div применяется к первому вектору. Индекс $()^T$ означает транспонирование.

Согласно [7, 8], различный выбор вектора плотности потока массы $\boldsymbol{j}_m$, тензора вязких напряжений Π и вектора теплового потока $\boldsymbol{q}$ позволяет построить три взаимосвязанные системы уравнений. Для уравнений Навье–Стокса [10] эти величины вычисляются как

$$\boldsymbol{j}_m = \rho \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \\ \Pi_{NS} = \eta[(\nabla \otimes \boldsymbol{u}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{u})^T - (2/3) I \operatorname{div} \boldsymbol{u}]. \tag{4}$$

Для двух других систем уравнений — квазигазодинамической и квазигидродинамической (КГД) [7–9] — вектор плотности потока массы определяется в виде

$$\boldsymbol{j}_m = \rho(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}).$$

Для квазигазодинамической системы замыкающие соотношения имеют вид

$$\boldsymbol{w} = \frac{\tau}{\rho}[\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p], \tag{5}$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \tau \boldsymbol{u} \otimes \Big[\rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \rho \boldsymbol{F}\Big] + \tau I \Big[(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{u}\Big], \tag{6}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{NS} - \tau \rho \boldsymbol{u}\Big[(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\varepsilon + p(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big]. \tag{7}$$

Характерное время τ и коэффициенты вязкости η и теплопроводности κ связаны между собой:

$$\tau = \frac{\eta}{\mathrm{Sc}\, p}, \quad \kappa = \frac{\eta c_p}{\mathrm{Pr}}, \tag{8}$$

где $\eta = \eta(T) = \eta_0 \Big(T/T_0\Big)^{\omega}$, Pr — число Прандтля, Sc — число Шмидта.

*) Институт математического моделирования РАН.

Для квазигидродинамической системы уравнений

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}),$$
$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{NS},$$
$$\boldsymbol{w} = \frac{\tau}{\rho}[\rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p]. \qquad (9)$$

Обе КГД системы отличаются от системы Навье–Стокса дополнительными слагаемыми с малым параметром размерности времени τ. Для стационарных течений дополнительные слагаемые имеют порядок $O(\tau^2)$.

Добавим к приведенным системам уравнений соотношения для идеального политропного газа $p = \rho RT$, $\varepsilon = c_v T$.

Для получения приближенной формулы массового расхода газа в длинном канале будем следовать методике работы [6]. Рассмотрим течение газа в плоском канале длины L и ширины H. Пусть на входе и выходе канала давление равно p_1 и p_2, где $p_1 > p_2$. Следуя [10], предположим, что градиент давления вдоль канала невелик и на малой длине канала dx плотность газа ρ можно считать постоянной. Будем искать решение системы уравнений (1)–(3) в виде

$$u_x = u(y), \quad u_y = 0, \quad p = p(x), \quad T = T_0. \qquad (10)$$

При этом все три выписанные системы уравнений сводятся к одному уравнению

$$\frac{dp(x)}{dx} = \eta_0 \frac{d^2u(y)}{dy^2}. \qquad (11)$$

Используя в качестве граничных условия скольжения Максвелла для скорости [11]

$$\left(u - \frac{2-\sigma}{\sigma}\lambda\frac{du}{dy}\right)\Big|_{y=0} = 0, \quad \left(u + \frac{2-\sigma}{\sigma}\lambda\frac{du}{dy}\right)\Big|_{y=H} = 0,$$

найдем профиль скорости, который имеет вид модифицированной параболы Пуазейля

$$u_x = -\frac{1}{2\eta_0}\frac{dp(x)}{dx}\Big[y(H-y) + \frac{2-\sigma}{\sigma}\lambda H\Big].$$

Здесь σ — коэффициент аккомодации для скорости, λ — средняя длина свободного пробега частиц, которая связана с коэффициентом вязкости:

$$\lambda = A\frac{\eta}{p}\sqrt{RT}, \qquad (12)$$

где $A = \sqrt{\pi/2}$ (формула Чепмена [11]) или $A = 2(7-2\omega)(5-2\omega)/\left(15\sqrt{2\pi}\right)$ (формула Берда [12]).

Вычисление массового расхода

Для уравнений Навье–Стокса плотность потока массы $j_{mx} = \rho u_x$. Следуя методике работы [10], осуществим замену $\rho = p/RT_0$. Тогда массовый расход газа, протекающего через некоторое сечение канала, вычисляется как

$$J_{NS} = \int_0^H j_{mx}\,dy = \int_0^H \rho u_x\,dy =$$
$$= -\frac{H^3}{8\eta_0 RT_0}\Big[\frac{2}{3}p\frac{dp}{dx} + 4\frac{2-\sigma}{\sigma}p\frac{dp}{dx}\frac{\lambda}{H}\Big]. \qquad (13)$$

Для обеих КГД моделей $j_{mx} = \rho(u_x - w_x)$, причем для рассматриваемой задачи величина w_x для обеих моделей одинакова и равна

$$w_x = -\frac{\tau}{\rho}\frac{dp}{dx} = -\frac{\eta}{p\,\mathrm{Sc}}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}.$$

В рамках КГД подхода расход газа через сечение канала равен

$$J = \int_0^H \rho(u_x - w_x)\,dy = \int_0^H \rho u_x\,dy - \frac{\eta}{\mathrm{Sc}}\int_0^H \frac{1}{p}\frac{dp(x)}{dx}\,dy =$$
$$= -\frac{H^3}{8\eta_0 RT_0}\Big[\frac{2}{3}p\frac{dp}{dx} + 4\frac{2-\sigma}{\sigma}p\frac{dp}{dx}\frac{\lambda}{H} + \frac{8}{A^2\,\mathrm{Sc}}p\frac{dp}{dx}\Big(\frac{\lambda}{H}\Big)^2\Big]. \qquad (14)$$

Последнее слагаемое в этой формуле получено с использованием замены коэффициента вязкости на длину свободного пробега по формуле (12).

Первое слагаемое в формуле (14) соответствует расходу, определяемому параболой Пуазейля с условиями прилипания, второе описывает увеличение расхода за счет условий скольжения скорости, третье увеличивает расход за счет процессов самодиффузии. Третье слагаемое имеет порядок $O(\tau^2)$ или $O(\mathrm{Kn}^2)$, где число Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda/H$. Для стационарных течений именно такое отличие существует между уравнениями Навье–Стокса и КГД моделями.

Согласно [1], массовый расход в плоском канале для свободномолекулярного течения равен

$$J_0^{xy} = \frac{4H^2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi RT_0}}\frac{dp}{dx}. \qquad (15)$$

Выражая коэффициент вязкости через длину свободного пробега (12), вычислим нормированное значение расхода (14)

$$Q_{xy} = \frac{J}{J_0^{xy}} = \frac{3\sqrt{\pi}A}{8\sqrt{2}}\Big[\frac{\mathrm{Kn}^{-1}}{6} + \frac{2-\sigma}{\sigma} + \frac{2}{A^2\,\mathrm{Sc}}\mathrm{Kn}\Big]. \qquad (16)$$

Отсюда следует, что величина Q имеет минимум при числе Кнудсена

$$\mathrm{Kn}_m = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Sc}}{3}}.$$

Положение минимума не зависит от коэффициента аккомодации σ. При $\mathrm{Sc} = 1$, $A = \sqrt{\pi/2}$, $\mathrm{Kn}_m = 0.36$.

В работе [2] на основе БГК приближения для молекул — твердых сфер ($\omega = 0.5$) вычислен расход в плоском канале. Результаты не выражаются аналитически и представлены в виде таблиц и графиков. Для малых чисел Kn ($\mathrm{Kn} \to 0$) приведена приближенная формула для расхода в виде

$$Q_{\mathrm{cer}} = \frac{\mathrm{Kn}^{-1}}{6} + \sigma + (2\sigma^2 - 1)\,\mathrm{Kn}\,. \qquad (17)$$

При $\sigma = 1$ выражения (16) и (17) отличаются численным коэффициентом порядка единицы.

Вычисление расхода для разреженных течений

Присутствующие в КГД уравнениях добавки, пропорциональные малому параметру τ, связаны с дополнительным осреднением, или сглаживанием, по времени при определении газодинамических параметров. Величина τ с точностью до коэффициента порядка единицы равна среднему времени свободного пробега частиц. При увеличении разреженности газа величина τ неограниченно возрастает. Для течений достаточно разреженных газов, когда $\lambda \geqslant H$, т. е. $\mathrm{Kn} = \lambda/H \geqslant 1$, естественно ограничить время осреднения и связать его дополнительно с характерным размером задачи. Для этого в выражение для τ (8) введем поправку вида

$$\tau = \frac{\eta}{p\,\mathrm{Sc}(1 + \mathrm{Kn})}. \qquad (18)$$

При $Kn \to 0$ выражение (18) вырождается в (8). Учитывая выражение для λ вида (12), получим, что при больших числах Кнудсена ($\mathrm{Kn} \gg 1$)

$$\tau = \frac{\eta}{p\,\mathrm{Sc}(1 + \mathrm{Kn})} \sim \frac{\eta}{p\,\mathrm{Sc}\,\mathrm{Kn}} = \frac{H}{\mathrm{Sc}\,A\sqrt{RT}}. \qquad (19)$$

Таким образом, для разреженных течений $\tau \sim H/\sqrt{RT}$ имеет порядок характерного времени свободного пробега молекул между столкновениями с границами рассматриваемой области.

Используем модифицированную формулу для τ при вычислении расхода в канале. В выражение (18) введем калибровочный коэффициент $\alpha \sim 1$: $\tau = \eta/(p\,\mathrm{Sc}(1 + \alpha\,\mathrm{Kn}))$. Тогда формула для локального расхода в сечении плоского канала (14) примет вид

$$J = -\frac{H^3}{8\eta_0 R T_0}\Big[\frac{2}{3} p \frac{dp}{dx} + 4\frac{2-\sigma}{\sigma} p \frac{dp}{dx}\frac{\lambda}{H} + \frac{8}{A^2\,\mathrm{Sc}} p \frac{dp}{dx}\Big(\frac{\lambda}{H}\Big)^2 \frac{1}{(1 + \alpha\lambda/H)}\Big], \qquad (20)$$

нормированное значение расхода (аналог формулы (16))

$$Q_{xy} = \frac{J}{J_0^{xy}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\frac{A}{\sqrt{2}}\Big[\frac{\mathrm{Kn}^{-1}}{6} + \frac{2-\sigma}{\sigma} + \frac{2}{A^2\,\mathrm{Sc}}\frac{\mathrm{Kn}}{(1+\alpha\,\mathrm{Kn})}\Big]. \qquad (21)$$

Нормированный расход имеет минимум при числе Кнудсена

$$\mathrm{Kn}_m = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Sc}}{3}}\left(1 - \alpha\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Sc}}{3}}\right)^{-1},$$

где Kn_m определяется как положительный корень соответствующего квадратного уравнения. При $\mathrm{Sc} = 1$, $A = \sqrt{\pi/2}$, $\alpha = 1$, величина $\mathrm{Kn}_m = 0.56$. Условие существования минимума Кнудсена $\mathrm{Kn}_m > 0$ накладывает ограничение на величину α:

$$\alpha < \frac{A\sqrt{\mathrm{Sc}}}{2\sqrt{3}} \sim 3.$$

При $\mathrm{Kn} \gg 1$ расход в канале будет равен расходу при свободномолекулярном течении и выражение (21) примет вид

$$Q_{xy} = \frac{J}{J_0^{xy}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\frac{A}{\sqrt{2}}\Big[\frac{2-\sigma}{\sigma} + \frac{2}{\alpha A^2\,\mathrm{Sc}}\Big] = 1. \qquad (22)$$

Отсюда можно определить величину коэффициента α. При $\sigma = 1$

$$\alpha = \frac{6\sqrt{\pi}}{A\,\mathrm{Sc}\left(8\sqrt{2} - 3A\sqrt{\pi}\right)}.$$

Если $A = \sqrt{\pi/2}$, $\mathrm{Sc} = 1$, то $\alpha = 1.82$.

Аналогично удается получить нормированное значение расхода для цилиндрического канала радиуса H:

$$Q_{rz} = \frac{J}{J_0^{rz}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\frac{A}{\sqrt{2}}\Big[\frac{\mathrm{Kn}^{-1}}{4} + \frac{2-\sigma}{\sigma} + \frac{2}{A^2\,\mathrm{Sc}}\frac{\mathrm{Kn}}{(1+\alpha\,\mathrm{Kn})}\Big], \qquad (23)$$

где массовый расход для свободномолекулярного течения [1]

$$J_0^{rz} = \frac{4H^3}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{RT_0}}\,\frac{dp}{dz}.$$

Нормированный расход имеет минимум при числе Кнудсена

$$\mathrm{Kn}_m = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{Sc}{2}}\left(1 - \alpha\frac{A}{2}\sqrt{\frac{Sc}{2}}\right)^{-1}.$$

Сопоставление выражений (21) и (23) с результатами [2] приведено на рис. 1 и 2 для $\sigma = 1$, $A = \sqrt{\pi/2}$, $\mathrm{Sc} = 1$. Нижняя кривая соответствует уравнениям Навье–Стокса с условием прилипания для скорости, кривая *1* — уравнениям Навье–Стокса с условиями скольжения для скорости, *2* — КГД модели для $\alpha = 0$, *3* — $\alpha = 1$, пунктирная линия (Cer) — данные [2]. На рис. 2 кривая *4* соответствует $\alpha = 2$.

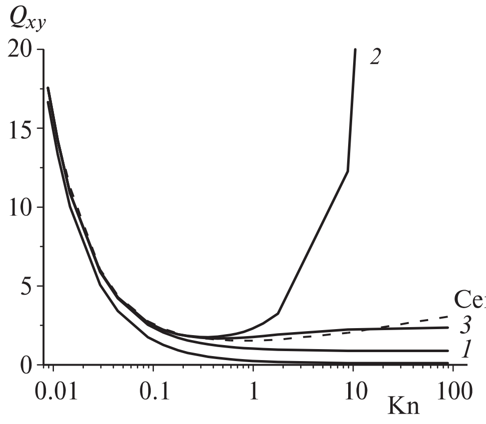

Рис. 1. Зависимость удельного расхода Q_{xy} от числа Kn в плоском канале

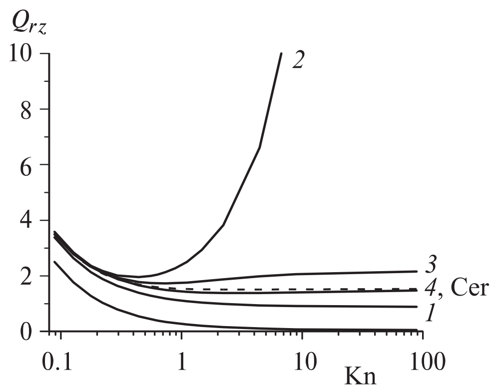

Рис. 2. Зависимость удельного расхода Q_{rz} от числа Kn в цилиндрическом канале

Таким образом, показано, что полученная в рамках КГД уравнений формула для расхода газа в длинных каналах предсказывает эффект Кнудсена. Введение поправки в параметр релаксации позволяет получить выражение для расхода в длинных изотермических каналах, которое хорошо совпадает с результатами кинетической теории во всем диапазоне чисел Кнудсена.

Литература

1. *Present R.D.* Kinetic theory of gases. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978.
3. *Cercigniani C., Sernagiotto F.* // Phys. Fluids. 1966. **9**, N 1. P. 40.
4. *Cercigniani C., Lampis M., Lorenzani S.* // Phys. Fluids. 2004. **16**, N 9. P. 3426.
5. *Kun Xu, Zhihui Li.* // J. Fluid Mech. 2004. **513**. P. 87.
6. *Elizarova T.G., Sheretov Yu.V.* // La Houille Blanche. Revue Internationale de l'Eau. 2003. N 5. P. 66.
7. *Шеретов Ю.В.* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1997. С. 127.
8. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.
9. *Елизарова Т.Г.* Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. Ч. 1, 2. М., 2005.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1986.
11. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. М., 1991.
12. *Bird G.A.* Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford, 1994.

Поступила в редакцию
01.03.06