УДК 517.958:533.7

КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Т. Г. Елизарова*), А. А. Хохлов
(*кафедра математики*)
E-mail: hohlov@afrodita.phys.msu.ru

Построена система квазигазодинамических уравнений для течений в присутствии внешних сил и источников тепла. Выведено уравнение баланса энтропии, демонстрирующее диссипативный характер возникающих дополнительных слагаемых.

Введение

Актуальными задачами численного моделирования газодинамических течений являются задачи с внешними источники энергии. В качестве таких проблем укажем, в частности, задачи горения, исследование возможностей управления потоками с помощью энерговложения, расчеты активных сред в резонаторах газовых лазеров и течения излучающего газа [1].

Для численного решения задач динамики вязкого газа разработаны эффективные разностные алгоритмы, использующие специальный вид регуляризации. Регуляризаторы строятся на основе квазигазодинамических уравнений (см., напр., [2–4]), которые отличаются от уравнений Навье–Стокса дополнительными слагаемыми дивергентного вида. Эти слагаемые имеют диссипативный характер, что демонстрируется справедливостью теоремы о неубывании полной термодинамической энтропии в замкнутом объеме, доказанной для этих уравнений. Однако построенные алгоритмы не охватывали задач с внешними источниками энергии.

В настоящей работе на основе подхода [2] построены квазигазодинамические уравнения при наличии в потоке тепловых источников. Показан диссипативный характер возникающих добавок.

КГД уравнения при наличии внешних сил и тепловых источников

Следуя методике, изложенной в [2], заметим, что из системы уравнений Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i}p = \rho F_i, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right) = \rho u_i F_i + Q \tag{3}$$

для идеального политропного газа с уравнением состояния

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1}T \tag{4}$$

следуют тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}u_i = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p - F_i = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon + \frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}u_i - \frac{Q}{\rho} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + \gamma p\frac{\partial}{\partial x_i}u_i - (\gamma-1)Q = 0. \tag{8}$$

Здесь и далее использованы обычные обозначения: ρ — удельная плотность, u_i — компонента скорости, p — давление, F_i — компонента внешней силы, ε — удельная внутренняя энергия, Q — мощность тепловых источников. В формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Справедливость тождеств (5)–(8) можно проверить непосредственной подстановкой в них выражений для производных по времени из уравнений Эйлера (1)–(3) с последующим приведением подобных слагаемых.

Запишем интегральные законы сохранения для малого объема V в конечно-разностном виде, заменяя производные по времени разностным отношением для моментов времени t и $t+\Delta t$, где Δt — малый промежуток времени. Тогда законы сохранения массы, импульса и полной энергии можно представить в виде соответственно:

$$\int\limits_V \frac{\hat\rho - \rho}{\Delta t}\,d^3x + \iint\limits_\Sigma \rho^* u_i^*\,d\sigma_i = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_V \frac{\hat\rho\hat u_i - \rho u_i}{\Delta t}\,d^3x + \iint\limits_\Sigma \rho^* u_i^* u_j^*\,d\sigma_j + \iint\limits_\Sigma p^*\,d\sigma_i =$$

*) Институт математического моделирования РАН.

$$= \int_V \rho^* F_i \, d^3x + \iint \Pi^*_{\mathrm{NS}\,ij} \, d\sigma_j, \tag{10}$$

$$\int_V \frac{\hat\rho(\hat u^2/2 + \hat\varepsilon) - \rho(u^2/2 + \varepsilon)}{\Delta t} \, d^3x +$$
$$+ \iint_\Sigma \rho^* u_i^* \left(\frac{u^{*2}}{2} + \varepsilon^* + \frac{p^*}{\rho^*} \right) d\sigma_i + \iint_\Sigma q^*_{\mathrm{NS}\,i} \, d\sigma_i =$$
$$= \int_V \rho^* u_i^* F_i \, d^3x + \iint_\Sigma \Pi^*_{\mathrm{NS}\,ij} u_i^* \, d\sigma_j + \int_V Q^* \, d^3x. \tag{11}$$

Здесь вектор теплового потока и тензор вязких напряжений вычисляются как

$$q_{\mathrm{NS}\,i} = -\varkappa \frac{\partial}{\partial x_i} T, \tag{12}$$

$$\Pi_{\mathrm{NS}\,ij} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right), \tag{13}$$

η и $\varkappa$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности. Величинами со звездочками в (9)–(11) обозначены значения газодинамических параметров в момент времени $t < t^* < t + \Delta t$. Обозначим $\Delta t/2 = \tau$ и определим параметры газа в средней точке $t = t^*$, ограничиваясь первым порядком малости по τ:

$$\rho^* = \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{14}$$

$$u_i^* = u_i + \tau \frac{\partial u_i}{\partial t}, \tag{15}$$

$$p^* = p + \tau \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{16}$$

Подставим эти выражения в формулы (9)–(11). Величины F_i и Q считаем мало меняющимися за время τ, поэтому звездочки возле них просто отбросим. Заметим также, что фактически использованное нами соотношение

$$\frac{\hat\phi - \phi}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \tag{17}$$

верно с точностью до членов второго порядка по Δt, поэтому в получающихся формулах слагаемыми порядка $O(\tau^2)$ можно пренебречь. Возвращаясь вновь к дифференциальному виду производной по времени в интегралах по объему, получим

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \, d^3x + \iint_\Sigma \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) d\sigma_i = 0, \tag{18}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i d^3x + \iint_\Sigma \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) u_j \, d\sigma_j +$$
$$+ \iint_\Sigma \tau \rho u_i \frac{\partial}{\partial t} u_j \, d\sigma_j + \iint_\Sigma \left(p + \tau \frac{\partial}{\partial t} p \right) d\sigma_i =$$
$$= \int_V \left(\rho + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) F_i \, d^3x + \iint_\Sigma \Pi_{\mathrm{NS}\,ij} \, d\sigma_j, \tag{19}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) d^3x +$$
$$+ \iint_\Sigma \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) d\sigma_i +$$
$$\iint_\Sigma \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial t} u_j + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + p \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} p \right) d\sigma_i +$$
$$+ \iint_\Sigma q_{\mathrm{NS}\,i} \, d\sigma_i = \int_V \left(\rho u_i + \tau \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \right) F_i \, d^3x +$$
$$+ \iint_\Sigma \Pi_{\mathrm{NS}\,ij} u_i \, d\sigma_j + \int_V Q \, d^3x. \tag{20}$$

Считаем, что в нулевом по τ приближении для нашего газа справедливы уравнения Эйлера (1)–(3). Используем эти уравнения и следующие из них тождества (5)–(8) для того, чтобы исключить производные по времени в слагаемых, линейных по τ. Приведем подобные члены, сгруппируем однотипные слагаемые и используем произвольность объема V, чтобы перейти от интегральной формы уравнений (18)–(20) к дифференциальной. Получим систему квазигазодинамических уравнений в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} j_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \rho_* F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i =$$
$$= j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ij} u_j + Q, \tag{23}$$

где введены обозначения

$$j_i = \rho (u_i - w_i), \tag{24}$$

$$w_i = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho F_i \right), \tag{25}$$

$$\rho_* = \left(\rho - \tau \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k \right), \tag{26}$$

$$\Pi_{ij} = \Pi_{\mathrm{NS}\,ij} + \tau \rho u_i \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} p - F_j \right) +$$
$$+ \tau \delta_{ij} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1) Q \right), \tag{27}$$

$$q_i = q_{\mathrm{NS}\,i} - \tau \rho u_i \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + p u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho} \right). \tag{28}$$

При $\tau = 0$ квазигазодинамическая система уравнений совпадает с системой уравнений Навье–Стокса.

Уравнение баланса энтропии

В работе [4] было показано, что в случае $Q=0$ производство энтропии для системы (21)–(23) является неотрицательным. Обобщим этот результат на случай $Q \neq 0$.

Обозначим полную производную по времени оператором

$$D\cdot = \rho\frac{\partial}{\partial t}\cdot + \rho\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - w_i)\cdot = \frac{\partial}{\partial t}\rho\cdot + \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\cdot. \quad (29)$$

Будем считать, что параметры рассматриваемого газа удовлетворяют тождеству Гиббса

$$TDs = D\varepsilon + pD\frac{1}{\rho}. \quad (30)$$

Используя систему (21)–(23), получим из этого равенства уравнение для энтропии s. Перенесем в уравнении (22) все слагаемые в левую часть и домножим на u_i:

$$0 = u_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}j_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}p - \rho_* F_i - \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ji}\right) = D\frac{u^2}{2} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p - \rho_* F_i u_i - u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ji}. \quad (31)$$

Отсюда следует соотношение

$$D\frac{u^2}{2} = -u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + \rho_* F_i u_i + u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ji}. \quad (32)$$

Уравнение (23) можно записать в виде

$$D\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_i}q_i = j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\Pi_{ij}u_j + Q, \quad (33)$$

откуда, используя предыдущее равенство, получаем

$$D\varepsilon = j_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ji}u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}q_i - \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} - \rho_* F_i u_i - u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ji} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p = (j_i - \rho_* u_i)F_i + \Pi_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}q_i - \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + Q.$$

Заметим, что $D\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - w_i)$, поэтому

$$Ds = \frac{1}{T}D\varepsilon + \frac{p}{T}D\frac{1}{\rho} = \frac{1}{T}\left((j_i - \rho_* u_i)F_i + \Pi_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}q_i - \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + Q\right) + \frac{p}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - w_i) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{q_i}{T} + q_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{T} + \frac{1}{T}\left((j_i - \rho_* u_i)F_i + \Pi_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + Q + p\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - w_i)\right).$$

Получаем уравнение баланса энтропии в виде

$$Ds = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{q_i}{T} + X, \quad (34)$$

где производство энтропии X имеет вид

$$X = q_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{T} + \frac{1}{T}\left((j_i - \rho_* u_i)F_i + \Pi_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + Q + p\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - w_i)\right). \quad (35)$$

Критерием физической корректности теории является неотрицательность $X \geqslant 0$ при $Q \geqslant 0$. Из полученного выражения (35), на первый взгляд, неотрицательность X не следует.

Преобразуем выражение (35), учитывая (24)–(28). Рассмотрим отдельно каждое слагаемое, выделяя, где это возможно, неотрицательные комбинации величин.

Для первого слагаемого получим

$$q_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{T} = \left(-\varkappa\frac{\partial}{\partial x_i}T - \tau\rho u_i\left(u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon + p u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{T} = \varkappa\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 +$$
$$+ \tau\rho u_i\left(u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon + p u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho}\right)\frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x_i}T =$$
$$= \varkappa\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 + \tau\rho\frac{u_i u_j}{T\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon\right) - \frac{\tau u_i u_j}{T\varepsilon}\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\right) - \frac{\tau u_i Q}{T\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{1}{T}((j_i - \rho_* u_i)F_i) = \frac{1}{T}\left(j_i - (\rho - \tau\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_j)u_i\right)F_i = \frac{F_i}{T}\left(-\rho w_i + \tau u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_j\right) =$$
$$= \frac{F_i\tau}{T}\left(u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j - \frac{\partial}{\partial x_i}p + \rho F_i\right) = \frac{\tau\rho}{T}F_i F_i - \frac{\tau\rho F_i}{T}u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i - \frac{\tau F_i}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}p.$$

Заметив, что

$$\frac{\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}}{2\eta T} = \frac{\eta}{T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

преобразуем следующий фрагмент в формуле для X:

$$\frac{1}{T}\Pi_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i = \frac{1}{T}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}u_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\right) + \tau\rho u_j\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}u_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p - F_i\right) + \tau\delta_{ij}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}p + \gamma p\frac{\partial}{\partial x_k}u_k - (\gamma-1)Q\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}u_i =$$

$$= \frac{\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}}{2\eta T} + \\ + \frac{\tau\rho u_j}{T}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}u_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p - F_i\right)\frac{\partial}{\partial x_j}u_i + \\ + \frac{\tau}{T}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}p + \gamma p\frac{\partial}{\partial x_k}u_k - (\gamma-1)Q\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u_i.$$

Наконец рассмотрим оставшиеся слагаемые:

$$-\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}j_i\frac{p}{\rho} + \frac{1}{T}u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + \frac{p}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - w_i) = \\ = \frac{\tau}{\rho T}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i}p - \rho F_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}p.$$

Собирая все фрагменты исходной формулы вместе, получаем

$$X = \varkappa\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 + \frac{\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}}{2\eta T} + \\ + \frac{\tau\rho}{T}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}u_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p - F_i\right)^2 + \\ + \frac{\tau\rho u_i u_j}{T\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon\right) - \\ - \frac{\tau p u_i u_j}{T\varepsilon\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\right) - \frac{\tau u_i Q}{T\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon + \\ + \frac{\tau}{T}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}p + \gamma p\frac{\partial}{\partial x_k}u_k - (\gamma-1)Q\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u_i + \\ + \frac{\tau}{T}u_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_j\right) + \\ + \frac{\tau}{\rho T}u_i u_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\right) + \frac{Q}{T}. \quad (36)$$

Для краткости здесь и далее использовано обозначение $(a_i)^2 \equiv \delta_{ij}a_i a_j$.

Используя соотношение

$$p = (\gamma-1)\varepsilon\rho,$$

можно записать (36) в виде

$$X = \varkappa\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 + \frac{\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}\Pi_{\mathrm{NS}\,ij}}{2\eta T} + \\ + \frac{\tau\rho}{T}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}u_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p - F_i\right)^2 + \\ + \frac{\tau\rho}{T\varepsilon}\left(u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon + \frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}u_i - \frac{Q}{\rho}\right)^2 + \\ + \frac{\tau p}{\rho^2 T}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i\right)^2 + \frac{Q}{T_*}, \quad (37)$$

где

$$T_* = T\left(1 + \tau\left(\frac{1}{\varepsilon}u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon + (\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x_i}u_i - \frac{Q}{\varepsilon\rho}\right)\right)^{-1}.$$

Как видно из полученного выражения, при $Q > 0$ (при $Q < 0$ энтропия может убывать) производство энтропии является неотрицательным, если величина τ является достаточно малой. При $\tau = 0$ величина производства энтропии (37) совпадает с соответсвующей величиной, вычисленной для уравнений Навье–Стокса.

Выводы

В работе построена система квазигазодинамических уравнений в случае, когда система находится под влиянием внешних сил и источников тепла. Для этого случая построено уравнение баланса энтропии. Показано, что при условии малости параметра τ производство энтропии является неотрицательным.

Полученный результат позволяет расширить область применения квазигазодинамических уравнений и соответствующих им численных алгоритмов для расчета течений вязкого сжимаемого газа в присутствии внешних тепловых источников.

Литература

1. *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М., 1985.
2. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь, 2000.
3. *Елизарова Т.Г., Соколова М.Е., Шеретов Ю.В.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 3. С. 545.
4. *Елизарова Т.Г., Серегин В.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 4. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 2005. N 4. P. 17).

Поступила в редакцию
22.05.06