ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2011, том 51, № 11, с. 2096–2105

УДК 519.634

ОСРЕДНЕНИЕ ПО ВРЕМЕНИ КАК ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ И КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1)]

Т. Г. Елизарова

(125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМатем. РАН)

e-mail: telizar@mail.ru; telizar@kiam.ru

Поступила в редакцию 22.04.2011 г.

Квазигазодинамические и квазигидродинамические (КГД) уравнения для описания течений сжимаемого газа и вязкой несжимаемой жидкости строятся как осреднение по времени соответствующих уравнений Навье–Стокса с использованием ряда приближений. Библ. 13.

Ключевые слова: квазигазодинамические и квазигидродинамические уравнения, осреднение по времени, уравнения Навье–Стокса.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[6] были предложены и изучены две взаимосвязанные системы уравнений – квазигазодинамические и квазигидродинамические (КГД) системы уравнений. Эти системы оказались очень эффективными для численного моделирования течений сжимаемого газа и вязкой несжимаемой жидкости.

В указанных выше работах и цитированных в них статьях приведен целый ряд способов построения КГД-систем. Квазигазодинамические уравнения впервые были построены в 1985 г. на основе кинетической модели разлет-максвеллизация, затем – с использованием разностной схемы для уравнения Больцмана, с помощью регуляризованного уравнения Больцмана в форме БКГ, а впоследствии выведены на основе законов сохранения, записанных для малого неподвижного объема газа. Однако все эти способы построения квазигазодинамических уравнений не являются строгими. В отличие от квазигазодинамических уравнений, квазигидродинамические уравнения были строго получены Ю.В. Шеретовым в 1994 г. на основе классических постулатов гидродинамики (см. [3], [6]), а затем те же уравнения были построены им приближенно с использованием законов сохранения для малого неподвижного объема. Из строгого вывода квазигидродинамической системы уравнений следует, что уравнения Навье–Стокса могут быть получены как следствие КГД-уравнений.

Исследования показывают, что КГД-уравнения и уравнения Навье–Стокса тесно связаны между собой и не противоречат друг другу. В частности, соответствие ряда точных решений систем квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений и уравнений Навье–Стокса и Эйлера анализируется в [3], [6]. В [7], [8] построены некоторые точные решения квазигидродинамических уравнений, удовлетворяющие также системам Навье–Стокса и Эйлера.

В данной работе предлагается новый приближенный способ построения систем КГД-уравнений. В его основу положено осреднение, или сглаживание классической системы уравнений Навье–Стокса по малому интервалу времени. Осреднение по времени как способ построения КГД-систем имеет свои преимущества по сравнению с уже имеющимися нестрогими подходами. Этот способ позволяет единообразно и достаточно просто получить все построенные ранее варианты КГД-уравнений, поясняет природу возникающих при этом регуляризующих добавок и может использоваться в дальнейшем для расширения семейства КГД-систем.

Заметим, что различные варианты осреднения по времени являются известным приемом преобразования уравнений в механике. В частности, осреднение по времени используется при построении уравнений Рейнольдса для описания турбулентных течений газа и жидкости (см. [9]).

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00136).

В работе подробно изложен способ осреднения и указаны соответствующие допущения и предположения. Вначале рассмотрен наиболее простой случай построения сглаженных уравнений для описания течений вязкой несжимаемой жидкости, затем последовательно приведено построение квазигидродинамической и квазигазодинамической систем уравнений для описания течений сжимаемого газа. С точки зрения математических выкладок данный способ в некоторой мере повторяет преобразования, впервые сделанные в методе конечного объема (см. [3], [6]) и в дальнейшем развитые в [4], [5], поскольку осреднение по времени потоков газодинамических величин неявно присутствовало в этом методе.

1. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОБЕРБЕКА–БУССИНЕСКА

Система уравнений Навье–Стокса для описания течений вязкой несжимаемой жидкости в приближении Обербека–Буссинеска имеет вид (см. [9], 10])

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\Pi_{\mathrm{NS}} - \beta\mathbf{g}T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}T) = \kappa\Delta T. \tag{3}$$

Неизвестными величинами в системе (1)–(3) являются $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ – скорость, p – давление и T – температура. Плотность жидкости считается постоянной. Тензор вязких напряжений определяется в виде

$$\Pi_{\mathrm{NS}} = \nu[(\nabla\otimes\mathbf{u}) + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}]. \tag{4}$$

Коэффициенты кинематической вязкости ν, температуропроводности κ и теплового расширения β постоянны и положительны, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести.

При записи системы уравнений использованы стандартные тензорные обозначения. В частности, диада $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$ представляет собой тензор-инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Осредним систему уравнений (1)–(3) по некоторому малому промежутку времени Δt и вычислим интегральное среднее на отрезке $t, t+\Delta t$. При этом *уравнение неразрывности* системы (1)–(3) примет вид

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\operatorname{div}\mathbf{u}(t')dt' = \operatorname{div}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\mathbf{u}(t')dt'\right] = \operatorname{div}\left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}(t^*)\Delta t\right] = \operatorname{div}\mathbf{u}(t^*) = 0. \tag{5}$$

Здесь мы воспользовались независимостью операций дифференцирования по пространству и интегрирования по времени, а также теоремой о среднем значении при вычислении интеграла по времени. Таким образом, $\mathbf{u}(t^*)$ – значение скорости в некоторый промежуточный момент времени t^*, где $t \le t^* \le t+\Delta t$.

Предположим, что решение системы уравнений (1)–(3) существует и обладает достаточной гладкостью. Предполагая, что интервал осреднения невелик и что за время Δt изменение скорости невелико, представим $\mathbf{u}^*(t)$ в виде первого члена разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}(t^*) = \mathbf{u}(t) + \tau\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \tag{6}$$

Здесь введена величина $0 \le \tau \le \Delta t$ – параметр сглаживания по времени.

Производную по времени в выражении (6) найдем из недивергентного вида уравнения (2):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{div}\Pi_{\mathrm{NS}} - \beta\mathbf{g}T. \tag{7}$$

Отбрасывая слагаемые порядка $O(\nu)$, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} - \nabla p - \beta\mathbf{g}T. \tag{8}$$

Таким образом, скорость в средней точке t^* представлена в виде

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{w}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{w} = \tau(\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} + \nabla p + \beta\mathbf{g}T), \tag{10}$$

и сглаженное по времени уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим *уравнение импульса* (2). Первое слагаемое может быть преобразовано двумя способами, а именно

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(t')dt' = \frac{\mathbf{u}(t+\Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \tag{12}$$

или с использованием теоремы о дифференцировании интеграла с переменными пределами (см. [9, с. 607])

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(t')dt' = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{u} + \tau\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right). \tag{13}$$

В обоих случаях

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(t')dt' = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + O\left(\tau\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\right). \tag{14}$$

Конвективное слагаемое также осредняем по малому интервалу времени и преобразуем согласно теореме о среднем значении с использованием соотношения (9):

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})dt' = \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^* = \operatorname{div}(\mathbf{u}(t^*)\otimes\mathbf{u}(t^*)) = \operatorname{div}[(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{w})] = \\ = \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \operatorname{div}[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})] + \operatorname{div}(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}).\end{gathered} \tag{15}$$

В этом равенстве последнее слагаемое имеет порядок $O(\tau^2)$.

Будем полагать, что за время осреднения изменения давления и температуры пренебрежимо малы, т.е. положим

$$p(t^*) = p(t), \quad T(t^*) = T(t). \tag{16}$$

При осреднении тензора вязких напряжений ограничимся только членами первого порядка малости, отбрасывая слагаемые порядка $O(\tau\dot{\nu})$. Тогда

$$\Pi^*_{\mathrm{NS}} = \Pi_{\mathrm{NS}}.$$

Пренебрегая величиной $\sim\tau\partial^2/\partial t^2$ в (14), получаем осредненное уравнение импульса (2) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\Pi_{\mathrm{NS}} + \operatorname{div}[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})] - \beta\mathbf{g}T. \tag{17}$$

Аналогичным образом используя предположение (16), получаем *сглаженное уравнение для температуры*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}^*T) = \kappa\Delta T. \tag{18}$$

Используя формулу для сглаженной скорости (9), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}T) = \operatorname{div}(\mathbf{w}T) + \kappa\Delta T. \tag{19}$$

Таким образом, система сглаженных уравнений для описания течений вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\Pi_{\mathrm{NS}} + \operatorname{div}[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})] - \beta\mathbf{g}T, \tag{21}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}T) = \operatorname{div}(\mathbf{w}T) + \kappa\Delta T, \tag{22}$$

где

$$\mathbf{w} = \tau(\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} + \nabla p + \beta\mathbf{g}T). \tag{23}$$

Вводя вектор плотности потока массы, который в данной задаче представляет собой осредненное по времени значение скорости

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{u} - \mathbf{w}, \tag{24}$$

записываем систему (20)–(23) в виде дифференциальных законов сохранения в соответствии с [3]–[6]:

$$\mathrm{div}\mathbf{j}_m = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \mathrm{div}\Pi - \beta \mathbf{g} T, \tag{26}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{j}_m T) = \kappa \Delta T, \tag{27}$$

где тензор вязких напряжений вычисляется в виде

$$\Pi = \Pi_{\mathrm{NS}} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}. \tag{28}$$

Таким образом, мы получили уже построенную ранее в работах [3]–[6] систему квазигидродинамических уравнений.

При построении сглаженной по времени системы уравнений мы использовали следующие предположения:

1. Решение исходной системы существует и обладает достаточной гладкостью.

2. При использовании теоремы о среднем значении параметр сглаживания τ один и тот же для всех слагаемых и всех уравнений.

3. Величины порядка $O(\tau^2)$, $O(\tau\nu)$, $O(\tau\kappa)$ и слагаемые вида $\tau\partial^2/\partial t^2$ малы.

4. На интервале сглаживания меняется только скорость течения (6), а изменения давления и температуры пренебрежимо малы (см. (16)).

Сглаженное уравнение баланса кинетической энергии. Уравнение, описывающее диссипацию кинетической энергии для системы (1)–(3), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \mathrm{div}\left[\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + p\right) - \Pi_{\mathrm{NS}}\mathbf{u}\right] = -\Phi \tag{29}$$

с диссипативной функцией

$$\Phi = \frac{\Pi_{\mathrm{NS}} : \Pi_{\mathrm{NS}}}{2\nu}. \tag{30}$$

По аналогии с предыдущим выводом, сглаженное уравнение (29) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^{*2}}{2}\right) + \mathrm{div}\left[\mathbf{u}^*\left(\frac{\mathbf{u}^{*2}}{2} + p\right) - \Pi_{\mathrm{NS}}\mathbf{u}^*\right] = -\Phi. \tag{31}$$

Используя для $\mathbf{u}^*$ выражение (9), преобразуем левую часть равенства (31) и опускаем слагаемые второго порядка малости:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \mathrm{div}\left[(\mathbf{u} - \mathbf{w})\left(\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{w})^2}{2} + p\right) - \Pi_{\mathrm{NS}}\mathbf{u}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \mathrm{div}\left[(\mathbf{u} - \mathbf{w})\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + p\right) - \Pi_{\mathrm{NS}}\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{w}\mathbf{u})\right] = -\Phi. \tag{32}$$

Таким образом, при осреднении по времени диссипативный характер уравнения сохраняется, но не появляется добавок к диссипативной функции вида $\mathbf{w}^2/\tau$, что обусловлено нестрогостью предложенного здесь вывода. Указанные добавки получены в [3], [6] при математически строгом построении уравнения для кинетической энергии на основе квазигидродинамической системы уравнений для описания течений вязкой несжимаемой жидкости.

2. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Приведем систему уравнений Навье–Стокса для описания течений вязкого сжимаемого газа (см. [9], [10]) в индексном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{\mathrm{NS}ij}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}q_{\mathrm{NS}i}=\rho u_iF_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\Pi_{\mathrm{NS}ij}u_j+Q. \tag{35}$$

Система уравнений (33)–(35) дополняется уравнениями состояния

$$p=p(\rho,T),\quad \varepsilon=\varepsilon(\rho,T) \tag{36}$$

и выражениями для тензора вязких напряжений и теплового потока

$$\Pi_{\mathrm{NS}ij}=\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_j+\frac{\partial}{\partial x_j}u_i-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\right),\quad q_{\mathrm{NS}i}=-k\frac{\partial}{\partial x_i}T. \tag{37}$$

Неизвестными величинами в системе (33)–(35) являются ρ – плотность, u_i – компоненты скорости, p – давление и ε – внутренняя энергия. Коэффициенты вязкости μ и теплопроводности k положительны. F_i и Q – компоненты внешней силы и мощность тепловых источников соответственно. δ_{ij} – символ Кронекера.

Осреднение системы уравнений по времени проведем аналогично тому, как это было сделано выше. Будем предполагать, что за время осреднения Δt изменяется только скорость течения u_i, а изменение плотности и давления пренебрежимо мало. Кроме того, полагаем, что малы и изменения внешней силы и мощности источника тепла. Т.е. при вычислении средних значений интегралов по времени будем полагать

$$\rho^*=\rho,\quad p^*=p,\quad u_i^*=u_i+\tau\frac{\partial u_i}{\partial t},\quad F_i^*=F_i,\quad Q^*=Q. \tag{38}$$

Запишем осредненную систему уравнений (33)–(35) в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i^*=0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial\rho u_i^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho(u_iu_j)^*+\frac{\partial}{\partial x_i}p=\rho F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{\mathrm{NS}ij}, \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^{*2}}{2}+\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i^*\left(\frac{u_i^{*2}}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}q_{\mathrm{NS}i}=\rho u_i^*F_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\Pi_{\mathrm{NS}ij}u_j^*+Q. \tag{41}$$

Для вычисления скорости u_i^* в сдвинутой точке используем (38), в котором значение производной по времени определим из недивергентного вида уравнения Эйлера для импульса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p=F_i. \tag{42}$$

Таким образом, с точностью до слагаемых второго порядка малости по τ имеем

$$u_i^*=u_i+\tau\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i-w_i, \tag{43}$$

где

$$w_i=\frac{\tau}{\rho}\left(\rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}p-\rho F_i\right). \tag{44}$$

Вводя обозначение для плотности потока массы

$$j_{mi}=\rho(u_i-w_i), \tag{45}$$

получаем *осредненное по времени уравнение неразрывности* в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}j_{mi}=0. \tag{46}$$

Преобразуем *уравнение импульса*. Первое слагаемое приближенно запишется в виде

$$\frac{\partial\rho u_i^*}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(u_i+\tau\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\approx\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}. \tag{47}$$

Конвективное слагаемое преобразуем так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_j}\rho(u_iu_j)^* = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i+\tau\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(u_j+\tau\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\rho(u_i-w_i)(u_j-w_j) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j}\rho(u_iu_j-u_iw_j-u_jw_i+w_iw_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}u_jj_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_iw_j.\end{gathered} \tag{48}$$

Здесь отброшено слагаемое второго порядка малости $\sim w_iw_j$.

Таким образом, осредненное по времени уравнение баланса импульса примет вид

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}j_{mi}u_j + \frac{\partial}{\partial x_i}p = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij}, \tag{49}$$

где тензор вязких напряжений вычисляется как

$$\Pi_{ij} = \Pi_{\mathrm{NS}ij} + \rho u_iw_j. \tag{50}$$

Уравнение баланса полной энергии. Аналогично предыдущему, производная по времени в принятом приближении не меняет свой вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^{*2}}{2}+\varepsilon\right) \approx \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon\right). \tag{51}$$

Работа внешних сил запишется в виде

$$\rho u_i^*F_i = \rho(u_i-w_i)F_i = j_{mi}F_i. \tag{52}$$

Конвективное слагаемое преобразуем так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i^*\left(\frac{u_i^{*2}}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\rho(u_i-w_i)\left(\frac{(u_i-w_i)^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i}\rho(u_i-w_i)\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho(u_i-w_i)(-u_iw_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}j_{mi}\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\rho(u_iu_jw_i) + O(w_iw_j).\end{gathered} \tag{53}$$

Таким образом, сглаженное уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}j_{mi}\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}q_{\mathrm{NS}i} = j_{mi}F_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij}u_j + Q. \tag{54}$$

Уравнение баланса момента импульса. Уравнение баланса момента импульса для системы Навье–Стокса (33)–(35) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x}\times\rho\mathbf{u}] + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}]) = [\mathbf{x}\cdot\rho\mathbf{F}] + \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{x}\times P_{\mathrm{NS}ij}e_{ij}], \tag{55}$$

где

$$P = -pI + \Pi_{\mathrm{NS}} \tag{56}$$

является тензором внутренних напряжений. Символом $P_{\mathrm{NS}ij}$ обозначен портрет тензора P_{NS} в базисе (e_1, e_2, e_3). По дважды повторяющимся индексам (i, j) выполняется суммирование; I – единичный тензор. Уравнение (55) является следствием уравнения баланса импульса (34) системы Навье–Стокса (33)–(35), т.е. может быть получено из него с помощью тождественных преобразований.

Построим осреднение по времени уравнения (55). Аналогично предыдущим выкладкам при сглаживании по времени в уравнении (55) преобразуется только слагаемое с дивергенцией, и это преобразование имеет вид

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}]) \to \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}^*\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}^*]) = \operatorname{div}(\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes[\mathbf{x}\times(\mathbf{u}-\mathbf{w})]) = \\ = \operatorname{div}(\mathbf{j}_m\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}]) - \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{w}]) + O(\mathbf{w}^2).\end{gathered} \tag{57}$$

Таким образом, сглаженное уравнение баланса момента импульса примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x}\times\rho\mathbf{u}] + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}]) = [\mathbf{x}\cdot\rho\mathbf{F}] + \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{x}\times P_{ij}e_{ij}], \tag{58}$$

где

$$P = -pI + \Pi_{\mathrm{NS}} + \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}. \tag{59}$$

Уравнение баланса момента импульса, или теорема моментов (58), было выписано в [3], [6], где было показано, что указанное уравнение выполняется тождественно при выполнении уравнения баланса импульса (49), как того и требуют постулаты, принятые в классической механике жидкости и газа.

Таким образом, система квазигидродинамических уравнений (44), (45), (46), (49), (50), (54) и (58) с замыканием (59) получена приближенно как осреднение по времени классических уравнений Навье–Стокса.

Уравнение баланса энтропии. Уравнение, описывающее поведение энтропии

$$s = c_v \ln\left(\frac{RT}{\rho^{\gamma-1}}\right) + \mathrm{const}$$

системы (33)–(35), имеет вид

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u} s) = \mathrm{div}\left(k\frac{\nabla T}{T}\right) + k\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 + \frac{\Phi}{T} \tag{60}$$

с диссипативной функцией

$$\Phi = \frac{\Pi_{\mathrm{NS}} : \Pi_{\mathrm{NS}}}{2\mu}. \tag{61}$$

Здесь $\Pi_{\mathrm{NS}} : \Pi_{\mathrm{NS}} = \sum_{i,j=1}^{3} (\Pi_{\mathrm{NS}})_{ij} (\Pi_{\mathrm{NS}})_{ij}$ – двойное скалярное произведение двух одинаковых тензоров. R – газовая постоянная, γ – показатель адиабаты, c_v – теплоемкость газа при постоянном объеме.

Сглаживание этого уравнения по времени формально приводит к замене в уравнении (60) скорости на ее сглаженное значение вида

$$\mathbf{u} \to \mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{w}. \tag{62}$$

Тем самым уравнение (60) принимает вид

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{j}_m s) = \mathrm{div}\left(k\frac{\nabla T}{T}\right) + k\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2 + \frac{\Phi}{T}. \tag{63}$$

В уравнении (62), в отличие от уравнения для энтропии, строго выведенного в [3], [6] для системы квазигидродинамических уравнений, отсутствует добавка к диссипативной функции $\rho \mathbf{w}^2/\tau$.

3. КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

В этом случае вновь будем сглаживать систему уравнений (33)–(35), но теперь будем полагать, что за малое время Δt успевают измениться все газодинамические величины – плотность, скорость и давление. Повторяя предыдущие рассуждения, обозначим средние по времени значения соответствующих величин знаком $*$. Тогда осредненная система уравнений (33)–(35) примет вид

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)^* = 0, \tag{64}$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)^* + \frac{\partial}{\partial x_i} p^* = (\rho F_i)^* + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi^*_{\mathrm{NS}ij}, \tag{65}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u_i^2}{2} + \varepsilon\right)\right]^* + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho u_i\left(\frac{u_i^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right]^* + \frac{\partial}{\partial x_i} q^*_{\mathrm{NS}i} = (\rho u_i F_i)^* + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi^*_{\mathrm{NS}ij} u_j^* + Q^*. \tag{66}$$

Сделаем следующие упрощающие предположения:

$$\rho^* = \rho + \tau\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad p^* = p + \tau\frac{\partial p}{\partial t}, \quad u_i^* = u_i + \tau\frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{67}$$

и $F_i^* = F_i$, $Q^* = Q$.

Ограничим наше рассмотрение только слагаемыми первого порядка малости, т.е. отбросим слагаемые порядка $O(\tau^2)$, $O(\tau\mu)$, $O(\tau k)$, а также при вычислении производных по времени отбросим слагаемые вида $\tau\partial^2/\partial t^2$. Тогда система уравнений (64)–(66) примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho u_i+\tau\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i\right)=0, \tag{68}$$

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\rho u_i+\tau\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i\right)u_j+\tau\rho u_i\frac{\partial}{\partial t}u_j\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p+\tau\frac{\partial}{\partial t}p\right)=\left(\rho+\tau\frac{\partial}{\partial t}\rho\right)F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{\mathrm{NS}ij}, \tag{69}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\rho u_i+\tau\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i\right)\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\tau\rho u_i\left(u_j\frac{\partial}{\partial t}u_j+\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right]+\\+\frac{\partial}{\partial x_i}q_{\mathrm{NS}i}=\left(\rho u_i+\tau\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i\right)F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{\mathrm{NS}ij}u_j+Q.\end{gathered} \tag{70}$$

Преобразуем *уравнение неразрывности* (68). Производную по времени найдем из уравнения Эйлера для импульса

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j-\frac{\partial}{\partial x_i}p+\rho F_i. \tag{71}$$

Подставляя это выражение в (68), сразу получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho u_i-\tau\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j+\frac{\partial}{\partial x_i}p-\rho F_i\right)\right]=0. \tag{72}$$

Вводя обозначения

$$w_i=\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j+\frac{\partial}{\partial x_i}p-\rho F_i\right),\quad j_{mi}=\rho(u_i-w_i), \tag{73}$$

получаем сглаженное по времени уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}j_{mi}=0. \tag{74}$$

Для преобразования уравнений импульса и энергии будем использовать уравнения Эйлера и следующие из них дифференциальные тождества. Для идеального политропного газа с уравнениями состояния

$$p=\rho RT,\quad \varepsilon=\frac{RT}{\gamma-1} \tag{75}$$

эти тождества имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}u_i=0, \tag{76}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p-F_i=0, \tag{77}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon+\frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}u_i-\frac{Q}{\rho}=0, \tag{78}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p+\gamma p\frac{\partial}{\partial x_i}u_i-(\gamma-1)Q=0. \tag{79}$$

Преобразуем *уравнение импульса* (69). Используя (73) и тождества (77) и (79), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\rho u_i-\rho w_i)u_j+\tau\rho u_i\left(-u_i\frac{\partial}{\partial x_i}u_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}p+F_j\right)\right]+\\+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[p+\tau\left(-u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p-\gamma p\frac{\partial}{\partial x_i}u_i+(\gamma-1)Q\right)\right]=\left(\rho-\tau\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i\right)F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{\mathrm{NS}ij}.\end{gathered} \tag{80}$$

Таким образом, сглаженное уравнение для импульса запишется в виде

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}j_{mi}u_j+\frac{\partial}{\partial x_i}p=\rho_*F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij}, \tag{81}$$

где тензор вязких напряжений

$$\Pi_{ij}=\Pi_{NSij}+\tau\rho u_i\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}u_j+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}p-F_j\right)+\tau\delta_{ij}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}p+\gamma p\frac{\partial}{\partial x_k}u_k-(\gamma-1)Q\right) \tag{82}$$

и

$$\rho_* = \rho - \tau\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i. \tag{83}$$

Преобразуем уравнение *баланса полной энергии* (70). Используя все четыре тождества Эйлера, получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}j_{mi}\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\tau\rho u_i u_j\left(-u_k\frac{\partial}{\partial x_k}u_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}+F_j\right)-\\ -\frac{\partial}{\partial x_i}\tau\rho u_i\frac{1}{\rho}\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}p+\gamma p\frac{\partial}{\partial x_i}u_i-(\gamma-1)Q\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\tau\rho u_i\left(-u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon-\frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k+\frac{Q}{\rho}\right)+\\ +\frac{\partial}{\partial x_i}\tau\rho u_i p\left(-u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}q_{\mathrm{NS}i}=j_{mi}F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{\mathrm{NS}ij}u_j+Q.\end{gathered} \tag{84}$$

Приводя подобные члены, получаем, что сглаженное по времени уравнение для полной энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}j_{mi}\left(\frac{u_i^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}q_i=j_{mi}F_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij}u_j+Q, \tag{85}$$

где поток тепла вычисляется как

$$q_i=q_{\mathrm{NS}i}-\tau\rho u_i\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon+pu_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\rho}-\frac{Q}{\rho}\right). \tag{86}$$

Осредненное по времени уравнение *баланса момента импульса* получается аналогично и совпадает с уравнением, полученным в [3], [6] как точное следствие КГД-уравнения баланса импульса.

Действительно, с учетом сделанных выше предположений, сглаженные уравнения (55), (56) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x}\times\rho\mathbf{u}]+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}])^*=[\mathbf{x}\cdot\rho\mathbf{F}]^*+\frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{x}\times P^*_{\mathrm{NS}ij}e_{ij}], \tag{87}$$

где

$$P^*_{\mathrm{NS}}=-p^*I+\Pi_{\mathrm{NS}}=-pI+\tau I[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p+\gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}-(\gamma-1)Q]+\Pi_{\mathrm{NS}}, \tag{88}$$

$$[\mathbf{x}\cdot\rho\mathbf{F}]^*=[\mathbf{x}\cdot\rho^*\mathbf{F}]=[\mathbf{x}\cdot(\rho-\tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}))\mathbf{F}]. \tag{89}$$

Конвективное слагаемое в (87) преобразуется с использованием соотношений

$$\begin{gathered}(\rho\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}])^*=(\rho\mathbf{u})^*\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}^*]=\mathbf{j}_m\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}]+\rho\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}^*]=\\ =\mathbf{j}_m\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}]-\tau\mathbf{u}\otimes[\mathbf{x}\times[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p-\rho\mathbf{F}]].\end{gathered} \tag{90}$$

Таким образом, сглаженное уравнение баланса импульса имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x}\times\rho\mathbf{u}]+\operatorname{div}(\mathbf{j}_m\otimes[\mathbf{x}\times\mathbf{u}])=[\mathbf{x}\cdot\rho_*\mathbf{F}]+\frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{x}\times P_{ij}e_{ij}], \tag{91}$$

где

$$P=-pI+\Pi_{\mathrm{NS}}+\tau\mathbf{u}\otimes[\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p-\rho\mathbf{F}]+\tau I[(\mathbf{u}\cdot\nabla)p+\gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}-(\gamma-1)Q]. \tag{92}$$

Построенные таким образом сглаженные уравнения Навье–Стокса в точности совпадают с квазигазодинамическими уравнениями, полученными ранее в [3]–[6] другими приближенными методами.

Согласно [11], система квазигазодинамических уравнений (73), (74), (81)–(83), (85), (86) обобщается на газ с общим уравнением состояния (36) путем замены

$$\gamma p\to\rho c_s^2,\quad \gamma-1\to\gamma_Q-1, \tag{93}$$

которую надо выполнить в последнем тождестве Эйлера (79), что приведет к соответствующей замене во второй скобке равенства (82). Скорость звука и показатель адиабаты в формулах (93) вычисляются как

$$c_s^2=\frac{\partial p}{\partial\rho}+\frac{T(\partial p/\partial T)^2}{\rho^2\partial\varepsilon/\partial T},\quad \gamma_Q=\frac{\partial p/\partial T}{\rho\partial\varepsilon/\partial T}+1. \tag{94}$$

В заключение этого раздела приведем вид диссипативной функции в уравнении баланса энтропии (60) для КГД-системы с учетом влияния внешних сил и источников тепла (см. [5]):

$$\Phi = \frac{\Pi_{NSij} : \Pi_{NSij}}{2\mu} + \tau\rho\left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i\right)^2 + \frac{\tau\rho}{\varepsilon}\left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon + \frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{2\rho}\right)^2 + Q\left(1 - \tau\frac{(\gamma - 1)Q}{4p}\right). \quad (95)$$

Как и в предыдущем случае, слагаемые $\sim\tau$, входящие в (95), не удается получить путем приближенного осреднения по времени классического уравнения для энтропии. Эти слагаемые выводятся при построении уравнения баланса энтропии вида (60) непосредственно как следствие системы КГД-уравнений. Т.е. операции осреднения и получения уравнения для энтропии на базе уравнений неразрывности, импульса и энергии не коммутативны.

ВЫВОДЫ

Приведен новый приближенный способ построения систем квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений, основанный на процедуре сглаживания по малому интервалу времени классических уравнений Навье–Стокса. Этот способ тесно связан с приближенным вариантом получения КГД-систем [3]–[6], основанным на интегрировании классических уравнений по малому неподвижному объему с последующей оценкой потоков, пересекающих границы этого объема.

Указанным способом удается построить уравнения неразрывности, импульса, момента импульса и энергии для обеих КГД-систем. Однако диссипативная функция в уравнении баланса энтропии для КГД-систем, построенная указанным способом, не включает в себя добавки $\sim\tau$, присущие КГД-системам. Последнее связано с нестрогостью описанного выше способа построения КГД-систем.

Новый приближенный вариант построения КГД-систем более прозрачен и менее громоздок, чем использованные ранее, и позволяет единообразно получить все варианты КГД-уравнений, включая систему КГД-уравнений для описания течений вязкой несжимаемой жидкости. Указанный подход можно использовать для получения целого семейства систем сглаженных уравнений КГД-типа, основанных на разнообразных уравнениях гидродинамики. В частности, изложенным здесь способом в [12] получены сглаженные уравнения мелкой воды. Этим способом в [13] были получены новые варианты КГД-уравнений для описания течений сжимаемой плазмы в электромагнитном поле, включая осреднение магнитного поля. Первые варианты таких систем были выписаны в [6]. Представляется интересным развитие указаного подхода применительно к описанию двухжидкостной магнитной гидродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: МГУ, 1999.
2. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.
3. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской ГУ, 2000.
4. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научн. мир, 2007.
5. *Elizarova T.G.* Quasi-gas dynamic equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009.
6. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск, 2009.
7. *Шеретов Ю.В.* Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестн. тверского ГУ. Сер. Прикл. матем. 2010. № 14. С. 41–58.
8. *Шеретов Ю.В.* Квазигидродинамические уравнения и аналитические функции // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской ГУ, 2010. С. 61–67.
9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
11. *Злотник А.А.* О квазигазодинамической системе уравнений с обобщенным уравнением состояния и источниками тепла // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 7. С. 5–64.
12. *Elizarova T.G., Bulatov O.V.* Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows // Compt Fluids. 2011. № 46. С. 206–211.
13. *Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д.* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Многомерный случай: Препринт, № 30. М.: ИПМатем., 2011. 24 с.