ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 459, № 4, с. 395–399

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:533.332

О КВАЗИГАЗО- И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

© 2014 г. Т. Г. Елизарова, А. А. Злотник, академик Б. Н. Четверушкин

Поступило 09.07.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565214340040

Квазигазодинамический (КГД) подход, позволяющий строить удобные и надежные разностные схемы для численного решения разнообразных задач газовой динамики, представлен в монографиях [1–3]. В том числе в [2, гл. 9] (см. также [4]) на основе кинетического уравнения Больцмана в форме, применимой для смеси одноатомных газов [5], была выведена и апробирована КГД-система уравнений бинарных смесей нереагирующих совершенных политропных газов.

В данном сообщении анализируются и расширяются возможности КГД-подхода в этой области. Исходные уравнения из [2] переписываются в форме законов сохранения, более стандартной в динамике вязкого газа и удобной для дискретизации, с дополнительным учетом внешней силы и теплового источника. Кратко обсуждается параболичность системы по Петровскому, обеспечивающая математическую корректность системы. Выписывается уравнение баланса энтропии и показывается неотрицательность производства энтропии для смеси газов, что обеспечивает физическую непротиворечивость системы (но выполняется не во всех известных описаниях смесей газов). Существенно, что для достижения последнего предлагается надлежащим образом обобщить выражения для обменных слагаемых в уравнении баланса полной энергии (изначально выведенные только для смеси одноатомных газов). Вводится также упрощение КГД-системы уравнений бинарных смесей – соответствующая квазигидродинамическая система, служащая для численного моделирования слабосжимаемых течений с до- и трансзвуковыми скоростями. В заключение приводятся упрощенные баротропные варианты обеих систем и для них дается уравнение баланса энергии с неположительным производством энергии.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва

Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”

КГД-система уравнений бинарных смесей газов a и b из [2] имеет вид следующих уравнений баланса массы, импульса и полной энергии для газа α:

$$\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha) = \\ = \operatorname{div}\{\tau[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha\otimes\mathbf{u}_\alpha) + \nabla p_\alpha]\}, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha\otimes\mathbf{u}_\alpha) + \nabla p_\alpha = \\ = \operatorname{div}\{\tau[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha\otimes\mathbf{u}_\alpha\otimes\mathbf{u}_\alpha) + \nabla\otimes p_\alpha\mathbf{u}_\alpha + \\ + (\nabla\otimes p_\alpha\mathbf{u}_\alpha)^{\mathrm{T}}]\} + \nabla\{\tau[\operatorname{div}(p_\alpha\mathbf{u}_\alpha)]\} + \mathbf{S}_{u,\alpha}, \tag{2}$$

$$\partial_t E_\alpha + \operatorname{div}[(E_\alpha + p_\alpha)\mathbf{u}_\alpha] = \\ = \operatorname{div}\left\{\tau\left[\operatorname{div}((E_\alpha + 2p_\alpha)\mathbf{u}_\alpha\otimes\mathbf{u}_\alpha) + \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}_\alpha|^2 p_\alpha\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\alpha - 1}\left(\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}\nabla p_\alpha + p_\alpha\nabla\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}\right)\right]\right\} + S_{E,\alpha}, \tag{3}$$

где $\alpha = a, b$. Здесь и ниже ∂_t и ∂_i – частные производные по t и x_i, операторы div и ∇ берутся по x, причем дивергенция тензора берется по его первому индексу, а $\otimes$ – знак тензорного произведения векторов.

Основными искомыми функциями являются $\rho_\alpha > 0$, $\mathbf{u}_\alpha = (u_{1\alpha}, \ldots, u_{n\alpha})$, $\theta_\alpha > 0$ – плотность, скорость, абсолютная температура газа α, зависящие от пространственных координат $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $n = 1, 2, 3$, и времени t. Участвуют также полная энергия, давление и удельная внутренняя энергия

$$E_\alpha = \frac{1}{2}\rho_\alpha|\mathbf{u}_\alpha|^2 + \rho_\alpha\varepsilon_\alpha, \quad p_\alpha = R_\alpha\rho_\alpha\theta_\alpha,$$

$$\varepsilon_\alpha = c_{V_\alpha}\theta_\alpha,$$

газа α, который считается совершенным политропным. Здесь присутствуют положительные постоянные $R_\alpha = \dfrac{R_0}{m_\alpha}$, причем R_0 – универсальная газовая постоянная, а m_α – молекулярный вес, и c_{V_α} – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Используется также выражение $p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha\varepsilon_\alpha$, где $\gamma_\alpha - 1 = \dfrac{R_\alpha}{c_{V_\alpha}}$.

Кроме того, величина $\tau = \tau(\rho_a, \rho_b, \theta_a, \theta_b) > 0$ – параметр релаксации, $\mathbf{S}_{u,\alpha}$, $S_{E,\alpha}$ – обменные слагаемые, связывающие между собой уравнения для газов a и b, вид которых будет уточнен ниже.

Как уже отмечалось, система КГД-уравнений (1)–(3) получена только для смеси одноатомных газов, т.е. при $\gamma_a = \gamma_b = \dfrac{5}{3}$, и формально распространена на случай любых $\gamma_\alpha > 1$ и $\gamma_\beta > 1$. Отметим, что правую часть уравнения (3) можно записать более компактно благодаря формуле

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}_\alpha|^2 p_\alpha\right) + \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\alpha - 1}\left(\frac{p_\alpha}{\rho_a}\nabla p_\alpha + p_\alpha\nabla\frac{p_\alpha}{\rho_a}\right) = \nabla\left(\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}(E_\alpha + p_\alpha)\right).$$

Более того, как рекомендовано в [2] (подобно случаю одного газа), введем в правой части уравнения (3) множитель $\alpha_{\Pr}^{-1}$ перед слагаемым $p_\alpha\nabla\left(\dfrac{p_\alpha}{\rho_\alpha}\right)$, где $\alpha_{\Pr} > 0$ – число Прандтля (при $\alpha_{\Pr} = 1$ он не нужен).

Как следует из [2, раздел 3.3], уравнения (1)–(3) можно переписать в следующей более стандартной в динамике вязкого газа и удобной для дискретизации форме:

$$\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha)] = 0, \tag{4}$$

$$\partial_t(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_a(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha)\otimes\mathbf{u}_\alpha] + \nabla p_\alpha = \operatorname{div}\Pi_\alpha + [\rho_\alpha - \tau\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha)]\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{S}_{u,\alpha}, \tag{5}$$

$$\partial_t E_\alpha + \operatorname{div}[(E_\alpha + p_\alpha)(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha)] = \operatorname{div}(-\mathbf{q}_\alpha + \Pi_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha)\cdot\mathbf{F}_\alpha + Q_\alpha + S_{E,\alpha} \tag{6}$$

при $\mathbf{F}_\alpha = 0$, $Q_\alpha = 0$. Здесь для общности анализа известным в КГД-теории образом [2, 3] добавлены заданные плотности массовой силы $\mathbf{F}_\alpha$ и теплового источника $Q_\alpha \geq 0$. Знак $\cdot$ обозначает скалярное произведение векторов.

В этих уравнениях тензор вязких напряжений Π_α имеет вид

$$\Pi_\alpha = \Pi_{NS\alpha} + \rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha\otimes\hat{\mathbf{w}}_\alpha + \tau[(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)p_\alpha + \gamma_\alpha p_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha - (\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha]\mathbb{I}, \tag{7}$$

причем $\Pi_{NS\alpha}$ – это классический тензор вязких напряжений Навье–Стокса

$$\Pi_{NS\alpha} = \mu_\alpha\left[2\mathbb{D}(\mathbf{u}_\alpha) - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha)\mathbb{I}\right] + \lambda_\alpha(\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha)\mathbb{I},$$

$$\mathbb{D}_{ij}(\mathbf{u}_\alpha) = \frac{1}{2}(\partial_i u_{j\alpha} + \partial_j u_{i\alpha})$$

с коэффициентами динамической и объемной вязкости вида

$$\mu_\alpha = \tau p_\alpha, \quad \lambda_\alpha = \tau p_\alpha\left(\frac{5}{3} - \gamma_\alpha\right), \tag{8}$$

а $\mathbb{I}$ – единичный тензор (порядка n). (Заметим, что станет $\lambda_\alpha = 0$, если в правые части уравнений (2), (3) при $\gamma_\alpha \neq \dfrac{5}{3}$ добавить соответственно слагаемые

$$\nabla\left[\tau p_\alpha\left(\gamma_\alpha - \frac{5}{3}\right)(\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha)\mathbb{I}\right],$$

$$\operatorname{div}\left[\tau p_\alpha\left(\gamma_\alpha - \frac{5}{3}\right)(\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha)\mathbf{u}_\alpha\right]\Bigg).$$

Вспомогательные векторы $\mathbf{w}_\alpha$ и $\hat{\mathbf{w}}_\alpha$ таковы:

$$\mathbf{w}_\alpha = \frac{\tau}{\rho_\alpha}[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha\otimes\mathbf{u}_\alpha) + \nabla p_\alpha - \rho_\alpha\mathbf{F}_\alpha],$$

$$\hat{\mathbf{w}}_\alpha = \frac{\tau}{\rho_\alpha}[\rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{u}_\alpha + \nabla p_\alpha - \rho_\alpha\mathbf{F}_\alpha],$$

при этом $\rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha)$ – плотность потока массы газа α.

Тепловой поток $\mathbf{q}_\alpha$ выражается формулой

$$-\mathbf{q}_\alpha = \kappa_\alpha\nabla\theta_\alpha + \tau\left[\rho_\alpha\left((\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\varepsilon_\alpha - \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha^2}(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\rho_\alpha\right) - Q_\alpha\right]\mathbf{u}_\alpha$$

с коэффициентом теплопроводности

$$\kappa_\alpha = \frac{\gamma_\alpha c_{V_\alpha}}{\alpha_{\Pr}}\tau p_\alpha. \tag{9}$$

Ниже вместо формул (8), (9) рассматриваются общие зависимости

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha(\rho_\alpha, \theta_\alpha) > 0, \quad \lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\rho_\alpha, \theta_\alpha) \geq 0,$$

$$\kappa_\alpha = \kappa_\alpha(\rho_\alpha, \theta_\alpha) > 0.$$

Важно отметить, что поскольку обменные слагаемые обычно зависят только от значений искомых функций (и не зависят от их старших производных по x, t), то на КГД-систему уравнений (4)–(6) очевидным образом переносятся результаты [6] о параболичности по Петровскому КГД-системы для одного газа (в соответствующем анализе происходит распадение на почти независимые вспомогательные подсистемы для газов a и b, связанные только через τ). Они свидетельствуют о математической корректности системы.

Энтропия газа α и энтропия смеси выражаются формулами

$$s_\alpha = S_0 - (\gamma_\alpha - 1)c_{V_\alpha}\ln\rho_\alpha + c_{V_\alpha}\ln\varepsilon_\alpha,$$

$$s = \frac{\rho_a s_a + \rho_b s_b}{\rho}, \quad \rho = \rho_a + \rho_b,$$

где S_0 — некоторая постоянная.

Т е о р е м а 1. *Справедливо уравнение баланса энтропии смеси*

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}[\rho_a s_a(\mathbf{u}_a - \mathbf{w}_a) + \rho_b s_b(\mathbf{u}_b - \mathbf{w}_b)] =$$
$$= -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}_a}{\theta_a} + \frac{\mathbf{q}_b}{\theta_b}\right) + \mathcal{P}_s, \tag{10}$$

в котором производство энтропии $\mathcal{P}_s$ выражается формулами

$$\mathcal{P}_s := \frac{1}{\theta_a}\Xi_a + \frac{1}{\theta_b}\Xi_b + \frac{1}{\theta_a}(S_{E,a} - \mathbf{S}_{u,a}\cdot\mathbf{u}_a) +$$
$$+ \frac{1}{\theta_b}(S_{E,b} - \mathbf{S}_{u,b}\cdot\mathbf{u}_b),$$
$$\Xi_\alpha = \Xi_{NS,1\alpha} + \frac{\kappa_\alpha}{\theta_\alpha}|\nabla\theta_\alpha|^2 + \frac{\rho_\alpha}{\tau}|\hat{\mathbf{w}}_\alpha|^2 +$$
$$+ \frac{\tau R_\alpha\theta_\alpha}{\rho_\alpha}[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha)]^2 + \frac{\tau c_{V_\alpha}\rho_\alpha}{\theta_\alpha}\times$$
$$\times\left[(\gamma_\alpha - 1)\theta_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\theta_\alpha - \frac{Q_\alpha}{2c_{V_\alpha}\rho_\alpha}\right]^2 +$$
$$+ Q_\alpha\left[1 - \frac{\tau(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha}{4p_\alpha}\right], \tag{11}$$

$$\Xi_{NS,1\alpha} = 2\mu_\alpha|\mathbb{D}(\mathbf{u}_\alpha)|^2 + \left(\lambda_\alpha - \frac{2}{3}\mu_\alpha\right)(\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha)^2 \ge 0, \tag{12}$$

где $\alpha = a$, b и $|\mathbb{D}(\mathbf{u}_\alpha)|^2$ — квадрат длины $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\alpha)$ (как n^2-мерного вектора).

При выполнении условий $\tau(\gamma_\alpha - 1)\dfrac{Q_\alpha}{4p_\alpha} \le 1$ с $\alpha = a$, b и

$$\frac{1}{\theta_a}(S_{E,a} - \mathbf{S}_{u,a}\cdot\mathbf{u}_a) + \frac{1}{\theta_b}(S_{E,b} - \mathbf{S}_{u,b}\cdot\mathbf{u}_b) \ge 0 \tag{13}$$

имеем $\mathcal{P}_s \ge 0$, т.е. производство энтропии неотрицательно.

Для доказательства обратимся к уравнению баланса энтропии для газа α

$$\partial_t(\rho_\alpha s_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha)] =$$
$$= -\operatorname{div}\frac{\mathbf{q}_\alpha}{\theta_\alpha} + \frac{1}{\theta_\alpha}\Xi_\alpha + \frac{1}{\theta_\alpha}(S_{E,\alpha} - \mathbf{S}_{u,\alpha}\cdot\mathbf{u}_\alpha). \tag{14}$$

Оно выводится умножением уравнения баланса импульса (5) на $\mathbf{u}_\alpha$ и вычитанием его из уравнения баланса полной энергии (6) с последующим делением результата на θ_α. Отсюда ясен вид последнего (обменного) слагаемого в правой части (14). Вывод формул (11), (12) при $Q_\alpha = 0$ дан в [2, 3]; более короткий вывод в более общей ситуации (для уравнений состояния реального газа и при $Q_\alpha \ne 0$) выполнен в [7]; там же можно найти другой вид записи этих формул. Суммируя уравнения (14) по $\alpha = a$, b, выводим уравнение (10).

Стандартные обменные слагаемые в молекулярно-кинетической теории (использованные и в [2]) имеют вид [5]

$$\mathbf{S}_{u,\alpha} = \nu_{\alpha\beta}\rho_a(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\alpha), \quad S_{E,\alpha} = \nu_{\alpha\beta}(\hat{E}_\alpha - E_\alpha),$$

где $\nu_{\alpha\beta} > 0$ — частота взаимных столкновений молекул газа α с молекулами газа β, а $\beta = b$ при $\alpha = a$ либо $\beta = a$ при $\alpha = b$. При этом

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{m_a\mathbf{u}_a + m_b\mathbf{u}_b}{m_a + m_b},$$
$$\hat{E}_\alpha = \frac{1}{2}\rho_\alpha|\hat{\mathbf{u}}|^2 + c_{V_\alpha}\rho_\alpha\hat{\theta}_\alpha, \tag{15}$$
$$\hat{\theta}_\alpha = \theta_\alpha + C_m\left[\theta_\beta - \theta_\alpha + \frac{(\gamma_\alpha - 1)m_\beta}{4R_0}|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2\right]$$

с $C_m = \dfrac{2m_a m_b}{(m_a + m_b)^2}$. Здесь множитель $\dfrac{(\gamma_\alpha - 1)m_\beta}{4R_0}$ обобщен по сравнению с [5] (где рассматривался только случай $\gamma_a = \gamma_b = \dfrac{5}{3}$) так, чтобы выполнялось балансное равенство для обменных слагаемых в уравнении полной энергии, см. ниже (18) (к сожалению, этот момент был упущен в ряде работ, включая [2, 8] и др.). Обратим внимание на равенство

$$C_m m_\beta|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2 = 2m_\alpha|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\alpha|^2. \tag{16}$$

Справедливо балансное равенство, многократно используемое ниже

$$\frac{\rho_a}{m_a}\nu_{ab} = \frac{\rho_b}{m_b}\nu_{ba} = N_{\text{col}},$$

где N_{col} — полное число столкновений между молекулами газов a и b.

Для указанных выше обменных слагаемых с учетом (16) имеем

$$\frac{1}{\theta_a}(S_{E,a} - \mathbf{S}_{u,a}\cdot\mathbf{u}_a) + \frac{1}{\theta_b}(S_{E,b} - \mathbf{S}_{u,b}\cdot\mathbf{u}_b) =$$
$$= \sum_{\alpha = a,b}\nu_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\frac{\rho_\alpha}{\theta_\alpha}(|\hat{\mathbf{u}}|^2 - |\mathbf{u}_\alpha|^2 - (2\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u}_\alpha - |\mathbf{u}_\alpha|^2)) +\right.$$

$$+ c_{V_\alpha}\rho_\alpha\left(\frac{\hat{\theta}_\alpha}{\theta_\alpha} - 1\right)\bigg] = \sum_{\alpha = a, b}\nu_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\frac{\rho_\alpha}{\theta_\alpha}|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\alpha|^2 + \right.$$

$$\left. + c_{V_\alpha}\rho_\alpha C_m\left(\frac{\theta_\beta}{\theta_\alpha} - 1\right) + \frac{c_{V_\alpha}\rho_\alpha m_\alpha(\gamma_\alpha - 1)}{2R_0\theta_\alpha}|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\alpha|^2\right] =$$

$$= N_{\mathrm{col}}\sum_{\alpha = a, b}\frac{m_\alpha}{\theta_\alpha}|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\alpha|^2 +$$

$$+ N_{\mathrm{col}}C_m\left[m_a c_{V_a}\left(\frac{\theta_b}{\theta_a} - 1\right) + m_b c_{V_b}\left(\frac{\theta_a}{\theta_b} - 1\right)\right].$$

При условии $m_a c_{V_a} = m_b c_{V_b}$ или, эквивалентно, $\gamma_a = \gamma_b$, выражение в квадратных скобках неотрицательно (так как $\xi + \xi^{-1} \ge 2$ при $\xi > 0$), тем самым условие (13) выполнено и производство энтропии неотрицательно. Это означает физическую непротиворечивость рассматриваемой системы.

Напомним свойства обменных слагаемых:

$$\mathbf{S}_{u,a} + \mathbf{S}_{u,b} = 0, \quad \mathbf{S}_{u,a}\cdot\mathbf{u}_a + \mathbf{S}_{u,b}\cdot\mathbf{u}_b =$$

$$= -N_{\mathrm{col}}\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2 \le 0. \tag{17}$$

Кроме того, при том же условии $\gamma_a = \gamma_b$ верно другое балансное равенство

$$S_{E,a} + S_{E,b} = N_{\mathrm{col}}\left[\frac{1}{2}(m_a + m_b)|\hat{\mathbf{u}}|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha = a, b} m_\alpha c_{V_\alpha}(\hat{\theta}_\alpha - \theta_\alpha) - \frac{1}{2}m_\alpha|\mathbf{u}_\alpha|^2\right] =$$

$$= N_{\mathrm{col}}\left[-\frac{m_a m_b}{2(m_a + m_b)}|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2 + \right.$$

$$\left. + C_m\sum_{\alpha = a, b} m_\alpha c_{V_\alpha}(\theta_\beta - \theta_\alpha) + C_m\frac{m_a + m_b}{4}|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2\right] = 0. \tag{18}$$

Важно подчеркнуть, что дальнейшая модификация 2-го выражения (15)

$$\hat{\theta}_\alpha = \theta_\alpha + C_{m\alpha}(\theta_\beta - \theta_\alpha) + C_m\frac{(\gamma_\alpha - 1)m_\beta}{4R_0}|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b|^2,$$

$$C_{m\alpha} := \frac{3}{2}(\gamma_\alpha - 1)C_m$$

обеспечивает свойство $m_a c_{V_a} C_{ma} = m_b c_{V_b} C_{mb}$ (причем независимо от явного вида C_m в формуле для $C_{m\alpha}$) и тогда уже при любых γ_a и γ_b (не только равных) будут выполнены как балансное равенство (18), так и неравенство (13), гарантирующее неотрицательность производства энтропии. Предложенные модификации заслуживают дальнейшего физического анализа.

КГД-система уравнений описывает течения газа во всем диапазоне скоростей. В [1–3] представлена также упрощенная квазигидродинамическая система для описания слабосжимаемых течений с до- и трансзвуковыми скоростями. Выполняя аналогичные упрощения в КГД-системе (4)–(6), приходим к квазигидродинамической системе уравнений бинарных смесей

$$\partial_t\rho_\alpha + \mathrm{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \hat{\mathbf{w}}_\alpha)] = 0, \tag{19}$$

$$\partial_t(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \mathrm{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \hat{\mathbf{w}}_\alpha)\otimes\mathbf{u}_\alpha] + \nabla p_\alpha =$$

$$= \mathrm{div}\hat{\Pi}_\alpha + \rho_\alpha\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{S}_{u,\alpha}, \tag{20}$$

$$\partial_t E_\alpha + \mathrm{div}[(E_\alpha + p_\alpha)(\mathbf{u}_\alpha - \hat{\mathbf{w}}_\alpha)] =$$

$$= \mathrm{div}(-\hat{\mathbf{q}}_\alpha + \hat{\Pi}_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha - \hat{\mathbf{w}}_\alpha)\cdot\mathbf{F}_\alpha + Q_\alpha + S_{E,\alpha}, \tag{21}$$

в которой теперь $\hat{\Pi}_\alpha = \Pi_{NS\alpha} + \rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha\otimes\hat{\mathbf{w}}_\alpha$, $-\hat{\mathbf{q}}_\alpha = \kappa_\alpha\nabla\theta_\alpha$ и $\alpha = a, b$. Она уже не может быть непосредственно выведена из уравнения Больцмана. Свойства параболичности этой системы по Петровскому очевидным образом следуют из [9]. Для нее также сохраняет силу теорема 1 с той разницей, что выражение для Ξ_α теперь существенно упрощается: $\Xi_\alpha = \Xi_{NS,1\alpha} + \frac{\rho_\alpha}{\tau}|\hat{\mathbf{w}}_\alpha|^2 + Q_\alpha$, а условие на τ (в связи с Q_α) пропадает.

Возможное в некоторых приложениях дальнейшее упрощение представленных систем связано с переходом к баротропному (в частности, изотермическому или адиабатическому) случаю и рассмотрению только уравнений баланса массы и баланса импульса (4), (5) или (19), (20), дополняемых уравнением состояния $p_\alpha = p_\alpha(\rho_\alpha)$, в частности, $p_\alpha(\rho_\alpha) = p_{1\alpha}\rho_\alpha^{\gamma_\alpha}$ с $p_{1\alpha} > 0$, $\gamma_\alpha \ge 1$. При этом в общем баротропном случае коэффициент γ_α в выражении (7) для Π_α следует заменить на первый адиабатический индекс $\Gamma_\alpha = \frac{\rho_\alpha p'_\alpha(\rho_\alpha)}{p_\alpha(\rho_\alpha)}$. Свойства параболичности по Петровскому этих систем следуют из [9, 10].

Введем функцию $P_{0\alpha}(r) := \int_{r_0}^{r}\left(\frac{r}{s} - 1\right)p'_\alpha(s)ds$, $r > 0$, с $r_0 > 0$. Пусть плотность массовой силы такова $\mathbf{F}_\alpha(x,t) = \nabla\Phi_\alpha(x) + \mathbf{f}_\alpha(x,t)$, где $\nabla\Phi_\alpha$ – плотность стационарной потенциальной массовой силы, а $\mathbf{f}_\alpha$ – ее возмущение.

Т е о р е м а 2. *Для баротропной* КГД-*системы уравнений* (4), (5) *справедливо уравнение баланса энергии*

$$\partial_t(E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}}) + \mathrm{div}\mathbf{A} - \mathcal{P}_E =$$

$$= \sum_{\alpha = a, b}[\rho_\alpha - \tau\mathrm{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha)]\mathbf{f}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha + \rho_\alpha\mathbf{f}_\alpha\cdot\hat{\mathbf{w}}_{\Phi\alpha}, \tag{22}$$

в котором потенциальная и кинетическая энергии смеси имеют вид

$$E_{\rm pot} = P_{0a}(\rho_a) - \rho_a\Phi_a + P_{0b}(\rho_b) - \rho_b\Phi_b,$$

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}(\rho_a|\mathbf{u}_a|^2 + \rho_b|\mathbf{u}_b|^2),$$

$$\mathbf{A} := \sum_{\alpha = a,\, b} \rho_\alpha(P'_{0\alpha}(\rho_\alpha) - \Phi_\alpha + 0.5|\mathbf{u}_\alpha|^2) \times$$
$$\times (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{w}_\alpha) - \Pi_\alpha\mathbf{u}_\alpha,$$

$$\mathcal{P}_E := -\sum_{\alpha = a,\, b}\left\{\Xi_{NS,\,1\alpha} - \mathbf{S}_{u,\,\alpha}\cdot\mathbf{u}_\alpha + \frac{\rho_\alpha}{\tau}|\hat{\mathbf{w}}_{\Phi\alpha}|^2 + \right.$$
$$\left. + \tau\frac{p'_\alpha(\rho_\alpha)}{\rho_\alpha}[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha)]^2\right\} \qquad (23)$$

есть производство энергии и

$$\hat{\mathbf{w}}_{\Phi\alpha} = \frac{\tau}{\rho_\alpha}[\rho_\alpha(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\mathbf{u}_\alpha + \nabla p_\alpha(\rho_\alpha) - \rho_\alpha\nabla\Phi_\alpha].$$

При $p'_\alpha(\rho_\alpha) \ge 0$, $\alpha = a, b$, *производство энергии неположительно*: $\mathcal{P}_E \le 0$.

Доказательство получается в результате суммирования уравнений баланса энергии (см. [11, утверждение 1]) для газов a и b с дополнительным учетом обменных слагаемых. Важное неравенство $\mathcal{P}_E \le 0$ следует из (12), (17).

Для баротропной КГД-системы уравнений (19), (20) теорема 2 сохраняет силу с теми упрощениями, что в правой части (22) надо опустить слагаемое $-\tau\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha)$, а в выражении для производства энергии (23) — последнее слагаемое, поэтому $\mathcal{P}_E \le 0$ без условий на $p'_\alpha(\rho_\alpha)$.

Отметим, что все рассмотренные уравнения бинарных смесей вместе с теоремами 1, 2 непосредственно обобщаются на случай, когда $\tau = \tau_\alpha$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 14–11–00549.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Науч. мир, 2007.
3. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2009.
4. *Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.-C.* // Europ. J. Mech. Ser. B. Fluids. 2001. V. 20. № 3. P. 351—369.
5. *Wu Y., Lee C.H.* // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 2. P. 313–322.
6. *Злотник А.А.* // ДАН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605–609.
7. *Злотник А.А.* // Мат. моделирование. 2010. Т. 22. № 7. С. 53–64.
8. *Kamali R., Emdad H., Alishahi M.M.* // Fluid Dyn. Res. 2008. V. 40. № 5. P. 343–363.
9. *Злотник А.А.* // Мат. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.
10. *Злотник А.А.* // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
11. *Злотник А.А.* // Мат. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.