

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ СГЛАЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ<sup>1)</sup>

© 2015 г. Т. Г. Елизарова\*, М. В. Попов\*\*

(\*125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН;

\*\**École Normale Supérieure de Lyon, CRAL, UMR CNRS 5574,  
Université de Lyon 1, 46 allée d'Italie 69007 Lyon, France)*

*e-mail: telizar@mail.ru; mikhail.v.popov@gmail.com*

Поступила в редакцию 26.01.2015 г.

Представлен новый конечно-разностный метод для численного моделирования сжимаемых МГД-течений, применимый к широкому классу задач. Метод состоит в использовании магнитных квазигазодинамических уравнений (КМГД-уравнений), которые, по сути, являются системой уравнений Навье–Стокса и уравнений Фарадея, к которым была применена процедура усреднения на малом интервале по времени. КМГД-уравнения дискретизируются на расчетной сетке с помощью центральных разностей. Усреднение позволяет стабилизировать численное решение и не использовать дополнительные ограничивающие процедуры (лимитеры и пр.). Бездивергентность магнитного поля обеспечивается применением теоремы Стокса. Представлены результаты расчетов тестовых 3D-задач: центральный взрыв в магнитном поле, взаимодействие ударной волны с облаком и трехмерный тест Орсага–Танга. Также продемонстрированы предварительные расчеты плазменного пинча, удерживаемого магнитным полем в ловушке. Библ. 16. Фиг. 13.

**Ключевые слова:** магнитная квазигазодинамика, КМГД, МГД-течения, конечно-разностный алгоритм, центрально-разностная аппроксимация.

DOI: 10.7868/S0044466915080086

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье представлен численный алгоритм и результаты моделирования нестационарных пространственных течений идеальной квазинейтральной плазмы, находящейся в поле электромагнитных сил. Численный алгоритм является расширением построенных ранее конечно-разностных схем, основанных на КГД-уравнениях для описания течений вязкого сжимаемого газа (см. [1]–[3]). Работа тесно связана с кругом интересов Антона Павловича Фаворского, который, являясь признанным специалистом в области вычислительной гидродинамики, в свое время активно поддержал еще молодое в то время научное направление, развитие которого привело к формированию КГД-подхода. Антон Павлович Фаворский как руководитель научной школы в области вычислительной магнитной гидродинамики положительно оценил бы полученные здесь результаты.

Квазигазодинамические уравнения (КГД-уравнения) выражают законы сохранения для усредненных по малому временному интервалу газодинамических переменных – плотности, компонентов импульса и энергии. При этом делается предположение, что усредненная величина является гладкой функцией времени, которую можно разложить в ряд Тейлора в окрестности каждого момента времени  $t$ , т.е.

$$\bar{f}(r, t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(r, t') dt' \approx f(r, t) + \tau \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} + \dots \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00773\_a).

Закон сохранения для усредненной величины  $\bar{f}(r, t)$  должен содержать слагаемые, отражающие как сохранение  $f(r, t)$ , так и сохранение поправки, пропорциональной малому параметру  $\tau$ , имеющему размерность времени. Таким образом, КГД-уравнения представляют собой уравнения Навье–Стокса, содержащие дополнительные диссипативные слагаемые. Эти слагаемые играют стабилизирующую роль при численном решении уравнений, так как являются причиной дополнительной диссипации.

КГД-уравнения, в которых учтено влияние магнитных полей, впервые были рассмотрены в [3], [4] для описания течений вязкого газа и жидкости. При этом влияние поля учитывалось в виде магнитных сил и диссипативных  $\tau$ -поправок в части газодинамики, а само поле описывалось уравнениями Максвелла без коррекции с помощью  $\tau$ -поправок. Для этой системы было построено уравнение баланса энтропии, выписано точное решение задачи Гартмана, проведен расчет течения электропроводного расплава в безындукционном приближении.

Однако описанную выше процедуру усреднения можно применить и к уравнениям для магнитной индукции, записанным в рамках единой системы магнитной гидродинамики. Этот подход позволит описывать магнитные вязкие течения с помощью квазигазодинамических уравнений для магнитной гидродинамики (КМГД-уравнений) самосогласованным образом. Такие уравнения впервые рассмотрены в работах [5], [6], где выполнено их исследование на некоторых стандартных 1D- и 2D-тестах: задаче Римана, задаче о распространении магнитных волн, задаче о диссипации и распаде альфвеновской волны, задаче о взрывной волне в замагниченной среде, задаче о вихре Орсага–Танга и задаче о взаимодействии ударной волны с облаком. Во всех случаях была продемонстрирована хорошая сходимость решения к точному при сгущении разностной сетки.

В [7] КМГД-уравнения были обобщены на случай уравнения состояния неидеального газа при наличии внешних сил и источника тепла. Было получено уравнение теплового баланса и исследованы энтропийные свойства КМГД-уравнений.

В данной работе мы приведем систему КМГД-уравнений для 3D-случая, записанную покомпонентно и представим результаты расчетов тестовых 3D-задач: центральный взрыв в магнитном поле, взаимодействие ударной волны с облаком и трехмерный тест Орсага–Танга. Также будут продемонстрированы предварительные расчеты плазменного пинча, удерживаемого продольным магнитным полем. Проблема устойчивости пинча является важнейшей в технологической задаче удержания плазмы в магнитных ловушках.

## 2. КМГД-УРАВНЕНИЯ

Запишем КМГД-уравнения в декартовой системе координат с использованием стандартных обозначений для независимых переменных:  $\rho$  – плотность,  $u_x, u_y, u_z$  – компоненты скорости,  $B_x, B_y, B_z$  – компоненты магнитной индукции,  $E$  – полная энергия единицы объема.

Будем также использовать краткие обозначения для квадратов модулей векторов скорости и магнитной индукции:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2, \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2.$$

Множитель  $\sqrt{1/4\pi}$  мы включили в определение вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . В этих обозначениях полная энергия единицы объема записывается в виде

$$E = \rho\varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{B^2}{2},$$

где  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия. Для замыкания системы уравнений потребуется уравнение состояния. Для случая идеального газа оно имеет вид  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , где  $p$  – газодинамическое давление,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Уравнение состояния, выраженное через температуру, имеет вид  $p = \rho RT/\eta$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\eta$  – средний молекулярный вес газа. Отсюда температура  $T$  выражается по формуле  $T = p\eta/\rho R$ .

Комбинация  $E$ ,  $p$  и  $\rho$  дает полную удельную энтальпию:

$$H = (E + p)/\rho.$$

Малый параметр, имеющий размерность времени, по которому проводится усреднение, обозначим через  $\tau$  (см. (1)). Для удобства второе слагаемое в разложении Тейлора в (1) обозначим через приращение  $\Delta$ :

$$\bar{f} = f + \Delta f.$$

Выпишем приращения всех величин, которые будут использованы в дальнейшем. Данные выражения получены из МГД-уравнений для невязкой и нетеплопроводной квазинейтральной плазмы (см. [8]):

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{\rho} &= -\tau \left( \mathbf{u} \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \\ \Delta \varepsilon &= -\tau \left( \mathbf{u} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad \Delta p = -\tau (\mathbf{u} \operatorname{grad} p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}), \\ \Delta u_i &= -\tau \left[ \mathbf{u} \operatorname{grad} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial i} \left( p + \frac{B^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial B_x B_i}{\partial x} + \frac{\partial B_y B_i}{\partial y} + \frac{\partial B_z B_i}{\partial z} \right) \right], \\ \Delta B_i &= \tau \left[ \frac{\partial}{\partial x} (B_x u_i - u_x B_i) + \frac{\partial}{\partial y} (B_y u_i - u_y B_i) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z u_i - u_z B_i) \right], \end{aligned}$$

где  $i = x, y, z$ ,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости. Скалярное произведение скорости на градиент величины  $f$  и дивергенция скорости имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \operatorname{grad} f &= u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Закон сохранения массы в рамках системы КМГД записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

где в качестве потоков выступают скорректированные компоненты плотности потока массы

$$j_i = \rho(u_i - w_i), \quad i = x, y, z.$$

Величина корректировки пропорциональна  $\tau$  и записывается через пространственные производные, являющиеся, по сути, производными от потоков в уравнении Эйлера для МГД:

$$\begin{aligned} w_x &= \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u_x^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y u_x - B_y B_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z u_x - B_z B_x) \right\}, \\ w_y &= \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_y u_x - B_y B_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho u_y^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_y^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z u_y - B_z B_y) \right\}, \\ w_z &= \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_z u_x - B_z B_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_z u_y - B_z B_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho u_z^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_z^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Законы сохранения компонент импульса имеют вид

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zi}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zi}}{\partial z}, \tag{3}$$

где  $i = x, y, z$ . Компоненты тензора  $T_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) выражают действие силы, связанной с потоком скорректированного импульса, газодинамическим и магнитным давлением вдоль каждого направления:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} j_x u_x + p + \frac{1}{2} B^2 - B_x^2 & j_y u_x - B_y B_x & j_z u_x - B_z B_x \\ j_x u_y - B_y B_x & j_y u_y + p + \frac{1}{2} B^2 - B_y^2 & j_z u_y - B_z B_y \\ j_x u_z - B_z B_x & j_y u_z - B_z B_y & j_z u_z + p + \frac{1}{2} B^2 - B_z^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее первый индекс обозначает номер столбца, второй – номер строки. Тензор  $\Pi_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) включает в себя тензор вязких напряжений Навье–Стокса  $\Pi_{ij}^{ns}$ , пропорциональный коэффициенту динамической вязкости  $\mu$ , и тензор  $\Pi_{ij}^{qmhhd}$ , связанный с поправками КМГД, пропорциональными коэффициенту  $\tau$ :

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{ns} + \Pi_{ij}^{qmhhd}, \quad (4)$$

где

$$\Pi_{ij}^{ns} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{4}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{4}{3} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\Pi_{ij}^{ns} = \Pi_{ji}^{ns}$ , а диагональные члены:

$$\Pi_{ii}^{ns} = \mu \left( 2 \frac{\partial u_i}{\partial i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad i = x, y, z.$$

Тензор  $\Pi_{ij}^{qmhhd}$  в (4) записывается в виде

$$\Pi_{ij}^{qmhhd} = \begin{pmatrix} -\rho u_x \Delta u_x - \Delta p - \frac{\Delta(B^2)}{2} + \Delta(B_x^2) & -\rho u_y \Delta u_x + \Delta(B_y B_x) & -\rho u_z \Delta u_x + \Delta(B_z B_x) \\ -\rho u_x \Delta u_y + \Delta(B_y B_x) & -\rho u_y \Delta u_y - \Delta p - \frac{\Delta(B^2)}{2} + \Delta(B_y^2) & -\rho u_z \Delta u_y + \Delta(B_z B_y) \\ -\rho u_x \Delta u_z + \Delta(B_z B_x) & -\rho u_y \Delta u_z + \Delta(B_z B_y) & -\rho u_z \Delta u_z - \Delta p - \frac{\Delta(B^2)}{2} + \Delta(B_z^2) \end{pmatrix}.$$

К приращению  $\Delta$  нужно применять правила дифференцирования, в соответствии с которыми имеем  $\Delta ab = a \Delta b + b \Delta a$ .

Уравнения для магнитной индукции имеют вид

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{xi}^m}{\partial x} + \frac{\partial T_{yi}^m}{\partial y} + \frac{\partial T_{zi}^m}{\partial z} = -\frac{\partial T_{xi}^{mn}}{\partial x} - \frac{\partial T_{yi}^{mn}}{\partial y} - \frac{\partial T_{zi}^{mn}}{\partial z}, \quad i = x, y, z, \quad (5)$$

где тензор, содержащий компоненты электрического поля, имеет вид

$$T_{ij}^m = u_j B_i - u_i B_j, \quad (6)$$

тензор, выражающий КМГД-поправку, определяется через комбинацию приращений:

$$T_{ij}^{mn} = \Delta(T_{ij}^m) = B_i \Delta u_j + u_j \Delta B_i - B_j \Delta u_i + u_i \Delta B_j. \quad (7)$$

Уравнение для полной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx}u_x + \Pi_{xy}u_y + \Pi_{xz}u_z) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx}u_x + \Pi_{yy}u_y + \Pi_{yz}u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zx}u_x + \Pi_{zy}u_y + \Pi_{zz}u_z), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_i = j_i \left( H + \frac{B^2}{2\rho} \right) - B_i (u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z), \\ Q_i = -k \frac{\partial T}{\partial i} + \rho u_i \Delta \varepsilon + \rho u_i (p + B^2) \Delta \frac{1}{\rho} + \\ + u_i (B_x \Delta B_x + B_y \Delta B_y + B_z \Delta B_z) - B_i (B_x \Delta u_x + B_y \Delta u_y + B_z \Delta u_z), \end{aligned}$$

здесь  $i = x, y, z$ ;  $k$  – коэффициент теплопроводности, определяемый через коэффициент динамической вязкости  $\mu$ , показатель адиабаты  $\gamma$ , универсальную газовую постоянную  $R$  и число Прандтля  $Pr$ :

$$k = \frac{\mu \gamma R}{(\gamma - 1) Pr}.$$

Уравнения (2), (3), (5), (8) составляют систему КМГД. Параметрами системы являются:  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $Pr$  – число Прандтля,  $\eta$  – средний молекулярный вес газа,  $\tau$  – регуляризирующий малый параметр. Для разреженных газов существует естественное определение параметра  $\tau$ :

$$\tau = \alpha \frac{l}{c_f}, \quad (9)$$

где  $l$  – характерная длина свободного пробега молекул газа,  $c_f = \max(c_f^x, c_f^y, c_f^z)$  – максимальное значение быстрой магнитоакустической скорости. Например, для направления  $x$  быстрая магнитоакустическая скорость вычисляется по формуле

$$c_f^x = \sqrt{\frac{1}{2} \left( c^2 + \frac{B^2}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( c^2 + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 - 4c^2 \frac{B_x^2}{\rho}}},$$

где  $c$  – скорость звука:

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho}.$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  в (9) выбирается в диапазоне 0.1 – 0.4. Определение (9) означает, что  $\tau$  есть время, за которое возмущение, распространяющееся с максимально возможной скоростью, проходит расстояние, равное длине свободного пробега в газе.

Параметр  $\tau$  в случае разреженных газов связан с коэффициентом динамической вязкости  $\mu$ :

$$\mu = \tau \rho S_c,$$

где  $S_c$  – число Шмидта.

Если газ нельзя рассматривать как разреженный, то согласно (9) имеем  $\tau \rightarrow 0$ . Если физические процессы слабо зависят от вязкости и теплопроводности, а газ неразрезанный, то КМГД-уравнения переходят в стандартные МГД-уравнения для невязкого нетеплопроводного квазинейтрального газа. Эти уравнения, записанные в консервативных переменных, имеют вид (см. [8])

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ u_x \left( E + p + \frac{B^2}{2} \right) - B_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_y^2 \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ u_y B_x - u_x B_y \\ 0 \\ u_y B_z - u_z B_y \\ u_y \left( E + p + \frac{B^2}{2} \right) - B_y (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ \rho u_z^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_z^2 \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_z B_y - u_y B_z \\ 0 \\ u_z \left( E + p + \frac{B^2}{2} \right) - B_z (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}.$$

Для течений, в которых вязкость мала, например, для течений идеальной плазмы, будем задавать  $\tau$  как параметр численной схемы. В этом случае он будет выполнять исключительно регулируемую роль и стремиться к нулю при уменьшении размера численных ячеек.

Заметим, что рассмотренные КМГД-уравнения не содержат слагаемых, пропорциональных второй производной по времени вида  $\sim \tau \partial^2 / \partial t^2$ . Формально при усреднении исходных уравнений по времени такие слагаемые можно выписать, однако в данной работе эти слагаемые полагаются малыми и опущены (см. [9]).

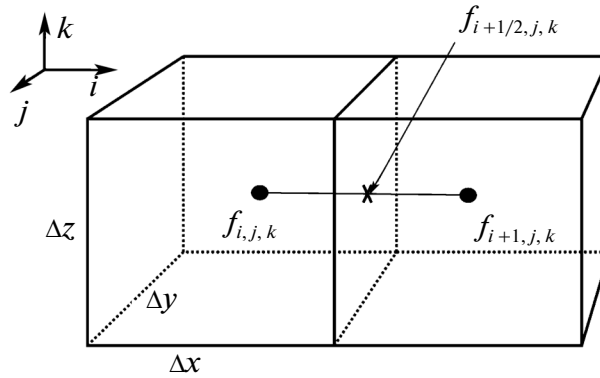
### 3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного решения системы уравнений КМГД используется явная разностная схема с центральной аппроксимацией производных. Задается равномерная сетка, разбивающая вычислительную область на ячейки размером  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ , где знак  $\Delta$  обозначает соответствующий шаг по сетке. Независимые переменные будем соотносить с центрами ячеек и обозначать целыми индексами  $i, j$  и  $k$ , соответствующим направлениям вдоль осей  $x, y$  и  $z$ . Полуцелые индексы будут обозначать величины, определенные на интерфейсах между ячейками. На фиг. 1 в качестве примера показаны две смежные ячейки сетки с величинами, определенными в их центрах и на интерфейсе между ними.

При численном решении уравнений (2), (3), (5), (8) производные по времени и пространству заменяются на разностные выражения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow \frac{\hat{f}_{i,j,k} - f_{i,j,k}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{f_{i+1/2,j,k} - f_{i-1/2,j,k}}{\Delta t}, \quad (10)$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени,  $\hat{f}$  обозначает неизвестные величины, соотносящиеся с новым временным слоем  $t + \Delta t$ ,  $f$  обозначает известные величины, находящиеся на временном слое  $t$ . Правила (10) означают, что изменения величин внутри разностной ячейки определяются потоками через ее грани.



Фиг. 1. Две смежные ячейки сетки с заданными в них величинами.

Шаг по времени определяется из условия Куранта

$$\Delta t = \sigma \min_{i,j,k} \left\{ \frac{\Delta x}{|u_{xi,j,k}| + c_{fi,j,k}^x}, \frac{\Delta y}{|u_{yi,j,k}| + c_{fi,j,k}^y}, \frac{\Delta z}{|u_{zi,j,k}| + c_{fi,j,k}^z} \right\},$$

где  $\sigma$  – число Куранта, определяемое экспериментально и не превышающее единицы.

Так как под знаками пространственных производных в (2), (3), (5), (8) находятся величины, сами определяемые через пространственные производные, то для их вычисления используются разности между центрами смежных ячеек:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+1/2,j,k} = \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}}{\Delta x}.$$

Это означает, что для вычисления неизвестных величин  $\hat{f}$ , относящихся к центру ячейки с номером  $(i, j, k)$ , используется информация также из смежных ячеек с номерами  $(i \pm 1, j, k)$ ,  $(i, j \pm 1, k)$  и  $(i, j, k \pm 1)$ . Таким образом, шаблон схемы состоит из 27 точек.

Устойчивость разностной схемы обеспечивается регуляризирующими параметрами  $\tau$ ,  $\mu$  и  $k$ , пропорциональными размеру численных ячеек:

$$\tau = \alpha \frac{h}{c_f}, \quad \mu = \tau p S c, \quad k = \frac{\mu \gamma R}{(\gamma - 1) P r},$$

где

$$h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

#### 4. БЕЗДИВЕРГЕНТНОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

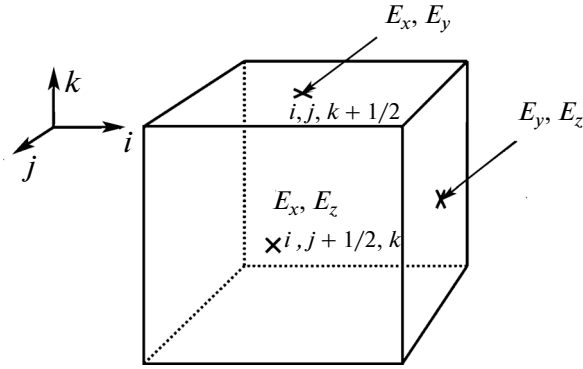
Моделирование магнитных течений должно также обеспечивать бездивергентность вычисляемого магнитного поля. Для этого мы предлагаем использовать метод ограничения переноса (constrained transport method) из [10]. Этот же метод использовался при построении численной схемы для расчета МГД-турбулентности в межзвездном газе (см. [11]). Метод основан на выполнении закона индукции Фарадея:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\text{rot} \mathbf{E}, \tag{11}$$

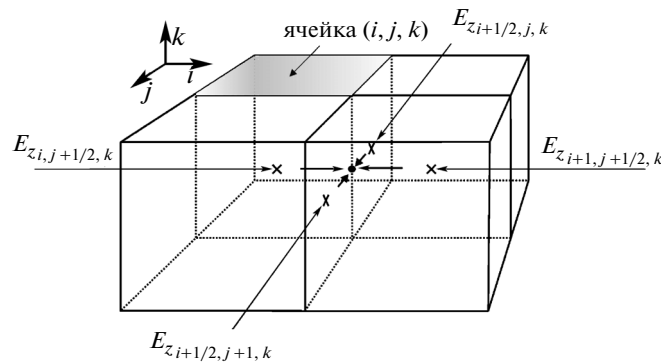
где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля. В КМГД-подходе вместо уравнений (5), решаются уравнения (11), в которых компоненты напряженности электрического поля записываются с учетом регуляризирующих слагаемых.

Напряженность электрического поля в веществе, движущемся со скоростью  $\mathbf{u}$ , имеет вид

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{u}, \mathbf{B}],$$



Фиг. 2. Компоненты напряженности электрического поля, используемые в уравнениях для магнитной индукции системы КМГД.



Фиг. 3. Перенос компонент напряженности электрического поля с центров граней ячеек на центры ребер.

поэтому компоненты электрического поля, относящиеся к соответствующим граням ячеек (см. фиг. 2), записываются с учетом КМГД-поправок согласно (6), (7) в виде

$$\begin{aligned}
 E_{xi,j+1/2,k} &= T_{yz}^m + T_{yz}^{mn}, & E_{xi,j,k+1/2} &= -T_{zy}^m - T_{zy}^{mn}, & E_{yi,j,k+1/2} &= T_{zx}^m + T_{zx}^{mn}, \\
 E_{yi+1/2,j,k} &= -T_{xz}^m - T_{xz}^{mn}, & E_{zi+1/2,j,k} &= T_{xy}^m + T_{xy}^{mn}, & E_{zi,j+1/2,k} &= -T_{yx}^m - T_{yx}^{mn}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

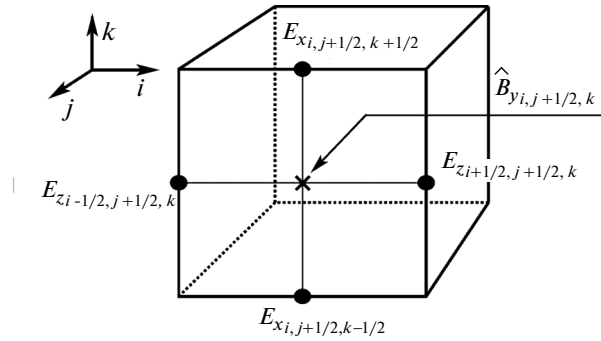
Согласно методу ограничения переноса компоненты (12) переносятся на центры ребер (см. фиг. 3) по формулам вида

$$\begin{aligned}
 E_{zi+1/2,j+1/2,k} &= \frac{1}{4}(E_{zi+1/2,j,k} + E_{zi+1/2,j+1,k} + E_{zi,j+1/2,k} + E_{zi+1,j+1/2,k}) + \\
 &+ \frac{\Delta y}{8} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j+1/4,k} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j+3/4,k} \right) + \frac{\Delta x}{8} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{i+1/4,j+1/2,k} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{i+3/4,j+1/2,k} \right),
 \end{aligned}$$

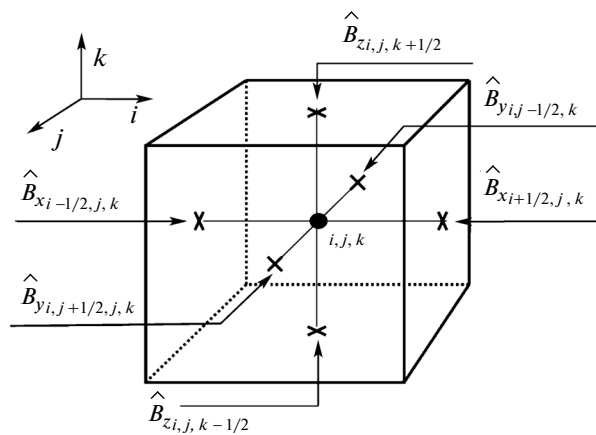
где соответствующие производные вычисляются в зависимости от знака скорости на грани:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j+1/4,k} = \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i,j+1/4,k}, & u_{xi+1/2,j,k} > 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1,j+1/4,k}, & u_{xi+1/2,j,k} < 0, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i,j+1/4,k} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i+1,j+1/4,k} \right), & \text{иначе} \end{cases}$$





Фиг. 4. Вычисление компонент магнитного поля на временном слое  $t + \Delta t$  в центрах граней ячеек по закону Фарадея.



Фиг. 5. Вычисление компонент магнитного поля на временном слое  $t + \Delta t$  в центрах ячеек.

с использованием разностных выражений вида

$$\left. \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|_{i,j+1/4,k} = 2 \left( \frac{E_{zi,j+1/2,k} - E_{zi,j,k}}{\Delta y} \right).$$

Полученные значения компонент электрического поля на центрах ребер ячеек используются в (11) для вычисления компонент магнитного поля в центрах граней ячеек на следующем временном слое  $t + \Delta t$  (см. фиг. 4). Разностная аппроксимация (11) имеет вид

$$\hat{B}_{xi+1/2,j,k} = B_{xi+1/2,j,k} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (E_{zi+1/2,j+1/2,k} - E_{zi+1/2,j-1/2,k}) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (E_{yi+1/2,j,k+1/2} - E_{yi+1/2,j,k-1/2}),$$

$$\hat{B}_{yi,j+1/2,k} = B_{yi,j+1/2,k} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{zi+1/2,j+1/2,k} - E_{zi-1/2,j+1/2,k}) - \frac{\Delta t}{\Delta z} (E_{xi,j+1/2,k+1/2} - E_{xi,j+1/2,k-1/2}),$$

$$\hat{B}_{zi,j,k+1/2} = B_{zi,j,k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{yi+1/2,j,k+1/2} - E_{yi-1/2,j,k+1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (E_{xi,j+1/2,k+1/2} - E_{xi,j-1/2,k+1/2}).$$

Значения компонент магнитного поля в центрах ячеек вычисляются простым усреднением (фиг. 5):

$$\hat{B}_{xi,j,k} = \frac{1}{2} (\hat{B}_{xi+1/2,j,k} + \hat{B}_{xi-1/2,j,k}), \quad \hat{B}_{yi,j,k} = \frac{1}{2} (\hat{B}_{yi,j+1/2,k} + \hat{B}_{yi,j-1/2,k}), \quad \hat{B}_{zi,j,k} = \frac{1}{2} (\hat{B}_{zi,j,k+1/2} + \hat{B}_{zi,j,k-1/2}). \quad (13)$$

Магнитное поле, полученное согласно (13), обладает свойством бездивергентности. В этом можно убедиться, вычислив дивергенцию в вершинах ячеек по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\mathbf{B}} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} &= \frac{1}{4\Delta x} (\hat{B}_{xi+1, j, k} - \hat{B}_{xi+1, j+1, k} - B_{xi, j, k} - B_{xi, j+1, k}) + \\ &+ \frac{1}{4\Delta x} (\hat{B}_{xi+1, j, k+1} + \hat{B}_{xi+1, j+1, k+1} - \hat{B}_{xi, j, k+1} - \hat{B}_{xi, j+1, k+1}) + \\ &+ \frac{1}{4\Delta y} (\hat{B}_{yi, j+1, k} + \hat{B}_{yi+1, j+1, k} - \hat{B}_{yi, j, k} - \hat{B}_{yi+1, j, k}) + \frac{1}{4\Delta y} (\hat{B}_{yi, j+1, k+1} + \hat{B}_{yi+1, j+1, k+1} - \hat{B}_{yi, j, k+1} - \hat{B}_{yi+1, j, k+1}) + \\ &+ \frac{1}{4\Delta z} (\hat{B}_{zi, j, k+1} + \hat{B}_{zi+1, j, k+1} - \hat{B}_{zi, j, k} - \hat{B}_{zi+1, j, k}) + \frac{1}{4\Delta z} (\hat{B}_{zi, j+1, k+1} + \hat{B}_{zi+1, j+1, k+1} - \hat{B}_{zi, j+1, k} - \hat{B}_{zi+1, j+1, k}). \end{aligned}$$

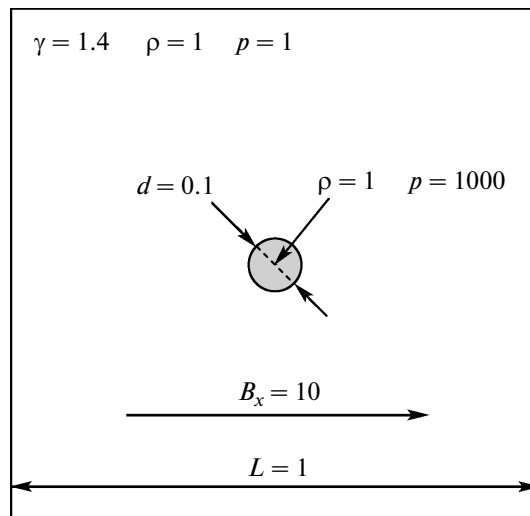
## 5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Ниже приводятся результаты применения изложенного метода к некоторым популярным тестам магнитной гидродинамики, расширенным на трехмерный случай. Численный анализ свойств метода на одномерных и двухмерных тестах проведен в работах [5], [6].

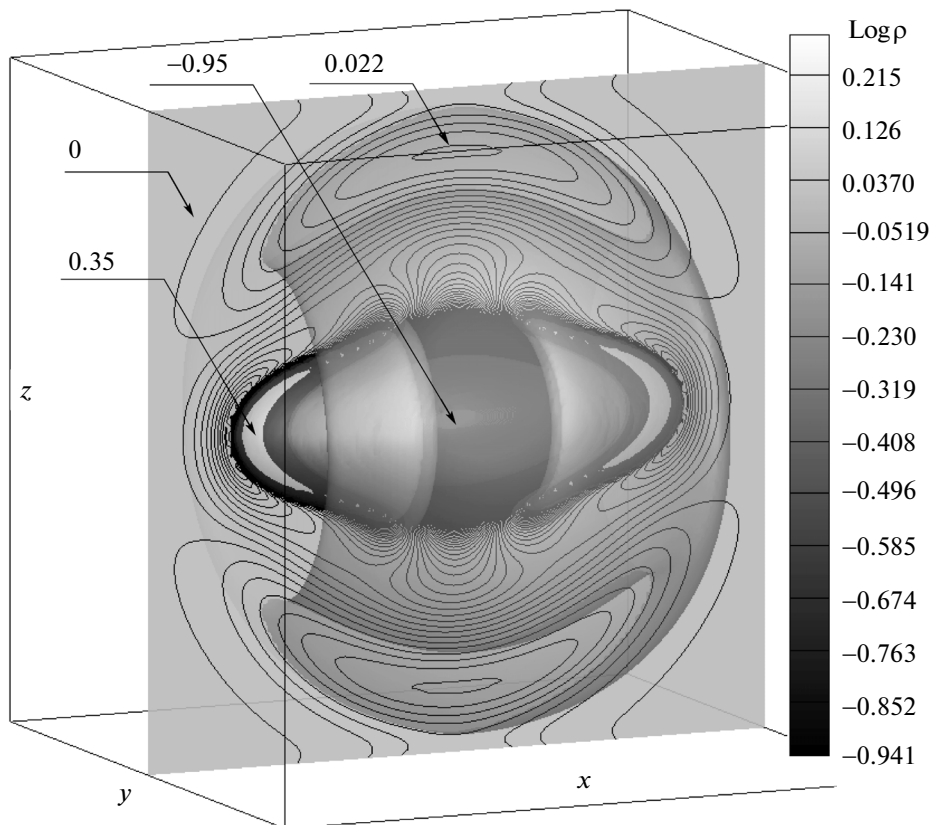
### 5.1. Взрыв в магнитном поле

В задаче рассчитывается структура распространяющегося возмущения, вызванного избыточным давлением в ограниченной области, в среде с наложенным магнитным полем (a blast wave problem) (см. [12]). Расчетная область представляет собой куб с ребром  $L = 1$ , на котором задается равномерная сетка, состоящая из  $120 \times 120 \times 120$  ячеек. В начальный момент времени пространство заполнено идеальным газом с  $\gamma = 1.4$ , плотностью  $\rho = 1$  и давлением  $p = 1$ , за исключением центральной сферической области с радиусом  $r = 0.05$ , в которой задано давление  $p = 1000$ . Вдоль направления  $x$  наложено однородное магнитное поле  $B_x = 10$  (см. фиг. 6). Расчет проводился с параметром  $\alpha = 0.5$  и числом Куранта  $\sigma = 0.1$ .

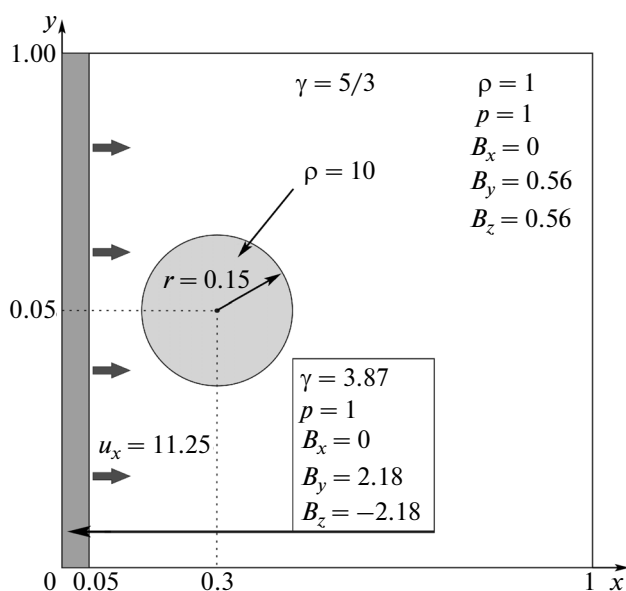
Результат расчета на момент  $t = 3 \times 10^{-2}$  представлен на фиг. 7. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости  $y = 0$  с линиями уровня. За счет магнитного давления, направленного ортогонально к полю, течение образует вытянутую вдоль направления поля структуру. Максимальная плотность  $\log \rho \sim 0.35$  достигается в областях максимального сопротивления среды. В центре достигаются минимальные значения  $\log \rho \sim -0.95$ .



Фиг. 6. Взрыв в магнитном поле. Начальные условия.



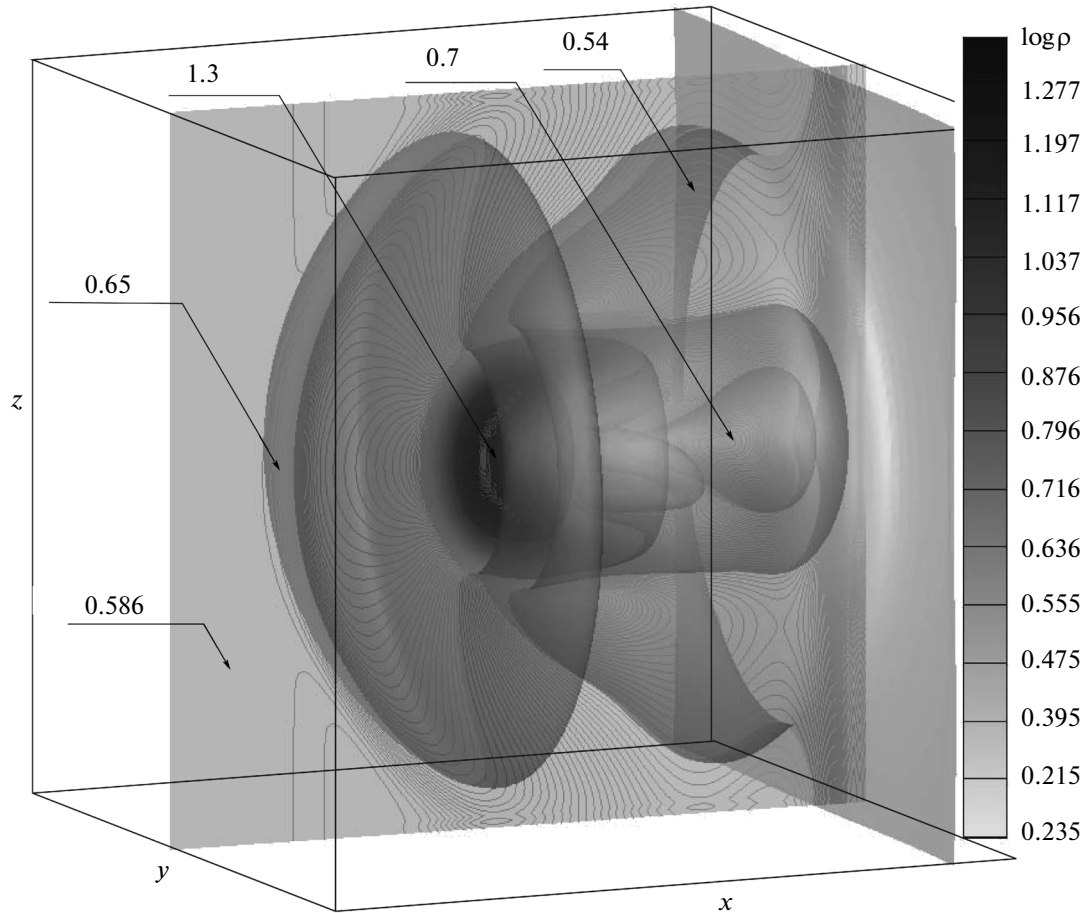
**Фиг. 7.** Взрыв в магнитном поле. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости  $y = 0$  с линиями уровней на момент  $t = 3 \times 10^{-2}$ . Дополнительно указаны значения в характерных областях.



**Фиг. 8.** Взаимодействие ударной волны с облаком. Начальные условия.

### 5.2. Взаимодействие ударной волны с облаком

В задаче рассчитывается процесс разрушения плотного облака при взаимодействии с ударной волной (см. [13]). Расчетная область представляет собой куб с ребром  $L = 1$ , на котором задается равномерная сетка, состоящая из  $120 \times 120 \times 120$  ячеек. Ударная волна инициируется с помощью



**Фиг. 9.** Взаимодействие ударной волны с облаком. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости  $y = 0$  с линиями уровней на момент  $t = 6.09 \times 10^{-2}$ . Дополнительно указаны значения в характерных областях.

разрыва между двумя состояниями  $\mathbf{U} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)$ , разделенными плоскостью  $x = 0.05$ :

$$U^L = (3.86859, 11.2536, 0, 0, 0, 2.1826182, -2.1826182, 167.345),$$

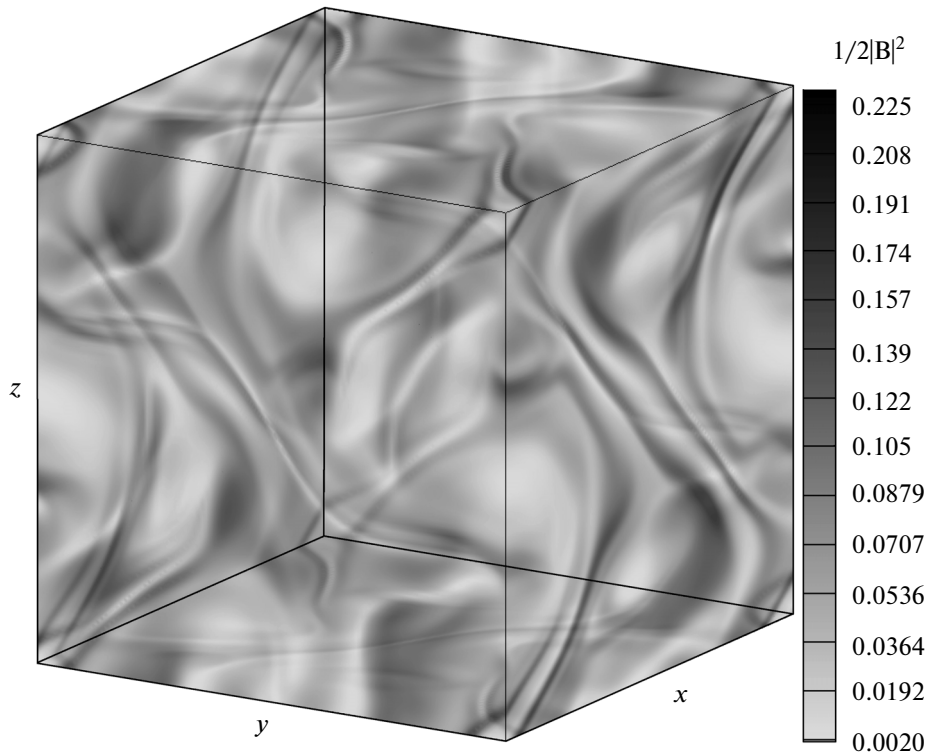
$$U^R = (1, 0, 0, 0, 0, 0.56418958, 0.56418958, 1).$$

Облако с плотностью  $\rho = 10$ , находящееся в гидростатическом равновесии со средой, задавалось в виде шара радиуса  $r = 0.15$  с центром в точке  $(x, y, z) = (0.3, 0.5, 0.5)$  (см. фиг. 8). Расчет проводился с параметром  $\alpha = 0.5$  и числом Куранта  $\sigma = 0.1$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ .

Результат расчета на момент  $t = 6.09 \times 10^{-2}$  представлен на фиг. 9. Показан логарифм плотности в виде трехмерного распределения и двухмерного разреза вдоль плоскости  $y = 0$  с линиями уровней. Полученная конфигурация отражает гидродинамическое обтекание препятствия. Из-за сопротивления облака потоку, перед облаком возникает контактный разрыв в форме полусферы. Позади наблюдается анизотропное течение, структура которого связана с направлением магнитного поля.

### 5.3. Трехмерный вихрь Орсага–Танга

Данная задача была впервые предложена в работе [14] в двухмерной постановке для исследования процесса развития сверхзвуковой турбулентности и получила в дальнейшем название вихря Орсага–Танга (Orszag–Tang vortex). В начальный момент времени задаются гладкие началь-



Фиг. 10. Трехмерный вихрь Орсага–Танга. Показана энергия магнитного поля на момент  $t = 0.5$ .

ные условия, которые дают быстрый переход к сложному течению с формированием и взаимодействием ударных волн. Задача является тяжелой для многих численных схем, так как возникающие градиенты величин, особенно сильные в центральной части расчетной области, могут привести к осцилляциям и отрицательным значениям плотности.

В данной работе мы впервые рассматриваем трехмерную постановку задачи. Расчетная область представляет собой куб с ребром  $L = 1$ , на котором задается равномерная сетка, состоящая из  $120 \times 120 \times 120$  ячеек. Граничные условия задаются периодическими. Мы предлагаем следующие начальные условия для 3D-случая:

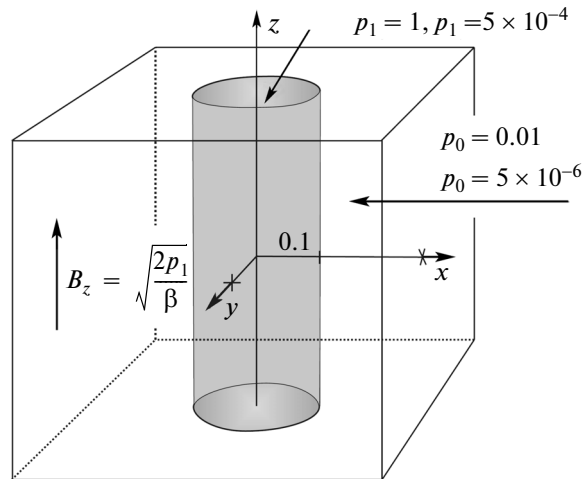
$$\begin{aligned} \rho &= 25/(36\pi), & p &= 5/(12\pi), \\ u_x &= -\sin(2\pi z), & u_y &= \sin(2\pi x), & u_z &= \sin(2\pi y), \\ B_x &= -B_0 \sin(2\pi z), & B_y &= B_0 \sin(4\pi x), & B_z &= B_0 \sin(4\pi y), \end{aligned}$$

где  $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$ . Расчет проводился с параметром  $\alpha = 0.5$  и числом Куранта  $\sigma = 0.1$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ .

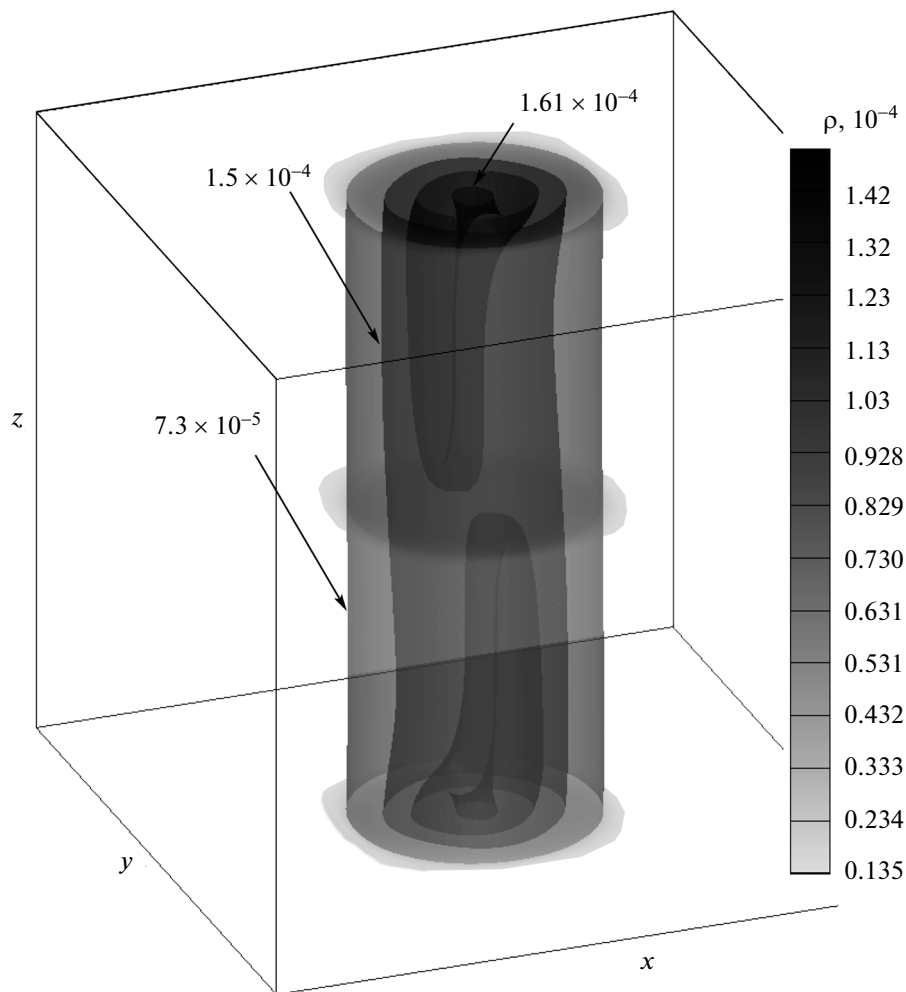
Результат расчета на момент  $t = 0.5$  представлен на фиг. 10. Показана энергия магнитного поля с помощью уровней в диапазоне от 0.02 до 2.25. Метод позволяет получать правильную структуру течения со всеми разрывами и выполнять расчет неограниченно долго. При продолжении счета течение постепенно распадается на мелкие структуры, кинетическая энергия диссипирует из-за вязкости.

#### 5.4. Удержание плазменного пинча в магнитной ловушке

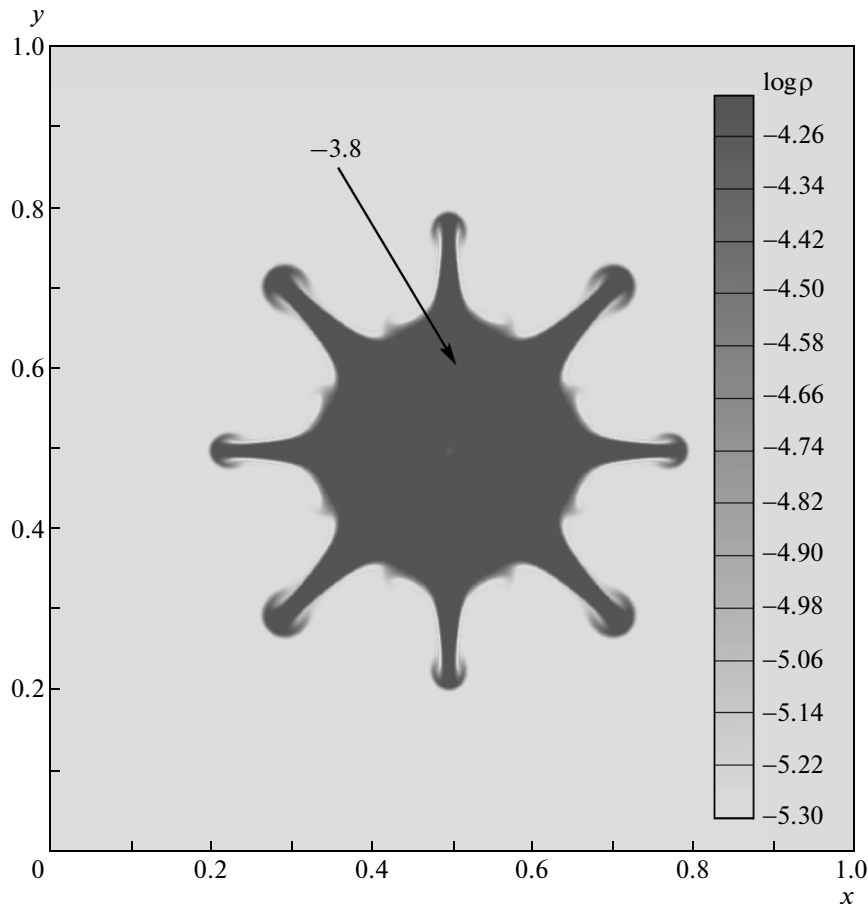
Было проведено моделирование процесса удержания горячего плазменного пинча в ловушке с помощью продольного магнитного поля. Такой пинч принято называть  $\theta$ -пинчем. Эта задача представляет большой интерес для технологической проблемы создания установок термоядерного синтеза типа ТОКАМАК и является предметом исследований несколько десятилетий (см., например, [15], [16]). Время удержания пинча в стабильном состоянии, полученное в экс-



Фиг. 11. Начальная конфигурация плазменного пинча в магнитной ловушке.



Фиг. 12. Плазменный пинч в магнитной ловушке. Показано распределение плотности с тремя характерными уровнями  $7.3 \times 10^{-5}$ ,  $1.5 \times 10^{-4}$  и  $1.61 \times 10^{-4}$  в некоторый момент времени.



**Фиг. 13.** Развитие гидродинамической неустойчивости пинча, рассчитанное в 2D-постановке в плоскости  $xu$  на сетке  $400 \times 400$ . Показано распределение плотности в логарифмическом масштабе в некоторый момент времени.

периментах, составляет порядка нескольких миллисекунд из-за развития гидродинамической неустойчивости. Мы рассматриваем данный процесс в безразмерной постановке.

Расчетная область представляет собой куб с ребром  $L = 1$ , заполненный идеальным газом с  $\gamma = 5/3$  (что соответствует водороду), плотностью  $\rho_0 = 5 \times 10^{-6}$  и давлением  $p_0 = 0.01$ . Пинч задавался в центре расчетной области в виде цилиндра радиусом  $r = 0.1$ , внутри которого  $\rho_1 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $p_1 = 1$ . В начальный момент времени задавалось продольное магнитное поле  $B_z = \sqrt{2p_1/\beta}$ , где плазменное  $\beta = 5$ . Начальная конфигурация пинча показана на фиг. 11. Использовалась равномерная сетка, состоящая из  $120 \times 120 \times 120$  ячеек. Расчет проводился с параметром  $\alpha = 0.5$  и числом Куранта  $\sigma = 0.1$ .

При моделировании был получен циклический процесс расширения и сжатия плазмы под действием магнитного давления. При этом магнитное поле, равномерно распределенное в начальный момент времени, выдавливалось из области пинча. Наблюдалось несколько циклов прямого и обратного перетока энергии между энергией магнитного поля и кинетической энергией вещества пинча. Увеличение энергии поля приводило к подавлению расширения плазмы.

Для проверки устойчивости работы кода был проведен расчет пинча, наклоненного к оси  $z$  в начальный момент времени на угол  $\sim 10^\circ$ . В результате происходило выравнивание пинча вдоль магнитного поля через циклические колебания. Этот процесс демонстрируется на фиг. 12, где представлено распределение плотности с тремя характерными уровнями  $7.3 \times 10^{-5}$ ,  $1.5 \times 10^{-4}$  и  $1.61 \times 10^{-4}$  на некоторый момент времени. Видна деформация формы пинча при колебаниях.

Используемая довольно грубая трехмерная вычислительная сетка не позволила разрешить мелкомасштабные структуры и смоделировать развитие неустойчивости. В двухмерной поста-

новке на сетке  $400 \times 400$  при моделировании среза пинча в плоскости  $xu$  такая неустойчивость была получена. Она развивалась в поперечных к полю направлениях и напоминала неустойчивость Рэлея–Тейлора. На фиг. 13 представлено распределение плотности в логарифмическом масштабе в некоторый момент времени, демонстрирующее образующиеся в результате этого процесса структуры.

При моделировании со слабым магнитным полем циклического процесса и развития неустойчивости не наблюдалось. Пинч в этом случае распадается за счет диффузии.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен алгоритм решения квазигазодинамических КМГД-уравнений, описывающих нестационарные сжимаемые магнитогидродинамические течения для случая идеального уравнения состояния. В отличие от более ранних работ, КМГД-уравнения были записаны самосогласованно в рамках единого подхода как к уравнениям, описывающим законы сохранения в гидродинамике, так и к уравнениям Фарадея для магнитных полей.

Представленная схема является полностью трехмерной, где все физические величины рассчитываются без расщепления по пространству. Тестирование численного алгоритма на нескольких “тяжелых” трехмерных задачах магнитной гидродинамики показало исключительную стабильность работы кода. Выбранный параметр расчета  $\alpha = 0.5$  и число Куранта  $\sigma = 0.1$  являются универсальными для любых задач.

Алгоритм является громоздким из-за наличия дополнительных монотонизирующих поправок, пропорциональных  $\tau$ , но простым в реализации. Использованная явная схема с центральными разностями позволяет распараллелить код естественным образом с помощью декомпозиции области по процессорам.

Достоинством подхода является отсутствие необходимости в традиционных монотонизирующих процедурах, таких как лимитеры, которые необходимо применять при использовании стандартных МГД-уравнений. Такие монотонизирующие процедуры не являются универсальными, что приводит к необходимости тонкой настройки кода для каждого конкретного случая.

Недостатком метода является его первый порядок точности, что требует использования более подробных сеток для получения решения, сравнимого по качеству с получаемым по схемам высокого порядка. Заметим, что порядок аппроксимации определяется по поведению на гладких областях, в то время как наиболее интересными являются разрывные решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
2. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.
3. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.
4. *Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Широков И.А.* “Численное моделирование течений электропроводной жидкости во внешнем магнитном поле // Ж. радиотехн. и электроника. 2005. Т. 50. № 2. С. 245–251.
5. *Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д.* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай // Препринт ИМП РАН. 2011. № 1. 20 с.
6. *Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д.* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Многомерный случай // Препринт ИПМ РАН. 2011. № 30. 24 с.
7. *Ducomet B., Zlotnik A.* On a regularization of the magnetic gas dynamics system of equations. Kinetic and Related Models. 2013. V. 6. № 3. P. 533–543.
8. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. *Елизарова Т.Г.* Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. С. 2096–2105.
10. *Gardiner T.A., Stone J.M.* An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 4123–4141.



11. *Ustyugov S.D., Popov M.V., Kritsuk A.F., Norman M.L.* Piecewise parabolic method on a local stencil for magnetized supersonic turbulence simulation // *J. Comput. Phys.* 2009. V. 228. P. 7614–7633.
12. *Dai W., Woodward P.* A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations // *J. Comput. Phys.* 1998. V. 142. P. 331–369.
13. *Tóth G.* The  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 161. P. 605–652.
14. *Orszag S.A., Tang C.-M.* Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 90. P. 129–143.
15. *Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З.* Устойчивость плазмы // *Успехи физ. наук.* LXXIII. 1961. М. 74. № 4. С. 701–766.
16. *Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977.