

Применение регуляризованных уравнений мелкой воды к моделированию сейшевых колебаний уровня Азовского моря

Т. Г. Елизарова¹, Д. С. Сабурин²

¹*Институт Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН, 125047, Россия, Москва, Миусская пл. 4*

²*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, кафедра математики, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д.1, стр.1*

E-mail: ¹ telizar@mail.ru, ² saburin@physics.msu.ru

Статья поступила: , подписана в печать

В рамках регуляризованных уравнений мелкой воды впервые построена модель, позволяющая осуществлять расчеты течений в масштабах морской акватории. Изложено описание модели и численного алгоритма применительно к топологии и природным особенностям Азовского моря. Приведены результаты расчетов гидродинамических течений при типичных сейшевых колебаниях в Азовском море, возникающих под влиянием нагонных или ветровых воздействий.

Ключевые слова: регуляризованные уравнения мелкой воды, разностная схема, сейшевые колебания, Азовское море.

УДК 517.958:551.466.66

Racs 47.11.Bc; 92.10.hk

Введение

Регион Азовского моря является стратегически важным для Российской Федерации: он имеет огромную транспортную, промышленную, рекреационную, стратегическую и военную значимость. Поэтому актуальной задачей является прогнозирование динамики и циркуляции моря при изменяющемся воздействии окружающей среды, связанным, в первую очередь, с изменением погодных условий. Азовское море обладает уникальными рельефом и климатом. Ряд климатических явлений, чаще всего вызываемых сильными ветрами, может нести серьезную угрозу человеку и принимать масштабы стихийных бедствий. К таким явлениям относятся сгонно-нагонные колебания уровня моря, штормовые ветры, вызванные прохождением циклонов, штормовые волны, сейши, цунами и ветровые волны. Каждое такое явление предъявляет дополнительные требования к численным моделям для их исследования и прогнозирования.

Сейшами называются стоячие волны, возникающие в замкнутых или частично замкнутых водоемах под действием перепада атмосферного давления, ветра или шторм-

мовых нагонов из соседних акваторий.

В мелководном Азовском море сейшевые колебания происходят постоянно. Течения, возникающие из-за сейши, приводят в движение всю массу воды водоема. В узловых точках, где уровень воды почти постоянен, и вблизи сужения берегов сейши могут формировать экстремальные скорости течения до 1.5 м/сек. Амплитуда колебаний уровня может превышать 1 м. Сейши могут серьезно усиливать сгонно-нагонные явления в этом регионе, вызывая катастрофические перепады уровня. Подробное описание этих явлений в Азовском море представлено, например, в [1]. Таким образом, изучение и прогнозирование сейшевых течений в мелководном Азовском море с пологими берегами является актуальной задачей.

В настоящее время существует ряд высокоточных моделей для описания гидродинамики Азовского моря, изложение которых можно найти в работах [2]-[9] и цитированной в них литературе. Эти численные модели используют разнообразные двумерные, трехмерные, однослойные и двухслойные конечно-разностные схемы, решаемые с помощью различных численных методов, включающих в себя явные и неявные конечно-разностные аппроксимации, применение разнесенных разнесенных и неравномерных сеток и методы конечных элементов.

Предлагаемый авторами подход основан на двумерных уравнениях мелкой воды. Для уравнений мелкой воды в [10] был предложен и отгестирован новый метод численного решения, основанный на сглаживании классических уравнений по малому интервалу времени. Данная процедура приводит к возникновению регуляризующих добавок, которые обеспечивают устойчивость численного решения задачи в широком диапазоне параметров. Этот подход распространен на неструктурированные сетки и может быть естественным образом распаралелен для расчетов на вычислительном кластере. Важным преимуществом данного алгоритма является его обобщение на случай течений, в которых возможно образование и исчезновение областей сухого дна, то есть формирование так называемых зон осушки и затопления [11]. Данный подход использовался, в частности, для численного моделирования колебаний жидкости в емкостях грузовых судов [12, 13] и моделирования экспериментально наблюдаемого формирования солитона на поверхности воды под воздействием ветра в кольцевом канале [14].

В данной работе регуляризованные уравнения мелкой воды впервые используются для численного моделирования течений в масштабе морской акватории. В качестве примера приводятся расчеты типичного для Азовского моря сейшевого колебания. В природных условиях такие колебания чаще всего возникают после продолжительного действия ветра с постоянным направлением, который формирует исходный градиент уровня морской поверхности.

1. Постановка задачи в рамках уравнений мелкой воды

Одна из особенностей задач гидродинамики морей и океанов состоит в том, что водная среда представляет собой достаточно тонкий слой, глубина которого много меньше его продольного размера. Этот факт широко используется для построения бароклинных моделей циркуляции морей и мирового океана в целом, см., например, [15, 16] и приведенную в них библиографию. Однако для описания ряда задач возможно использование более простого гидродинамического приближения - приближения мелкой воды [17]. В этом приближении пренебрегается вертикальной составляющей скорости в слое и полагается, что продольные скорости постоянны по его толщине.

Будем рассматривать двумерную систему уравнений мелкой воды в потоковой форме. В качестве внешних сил будем учитывать ветровое воздействие, силу Кориолиса и трение о дно. С учетом этих сил и топологии дна система будет записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu_x^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_x u_y) &= hf^c u_y - gh \frac{\partial b}{\partial x} + \tau^{x,w} - \tau^{x,b} \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_y^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= -hf^c u_x - gh \frac{\partial b}{\partial y} + \tau^{y,w} - \tau^{y,b} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $h(x, y, t)$ - высота жидкости над уровнем дна, $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$ - компоненты скорости течения, g - ускорение силы тяжести, функция $b(x, y)$ описывает уровень рельефа дна (Рис. 1,2).

Проекции силы трения ветра о поверхность воды обозначены через τ^w и вычисляются как $\tau^{i,w} = \gamma |W| W_i$, где W_i - компонента скорости ветра, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ - модуль скорости ветра, γ - коэффициент трения ветра о свободную поверхность воды.

Проекции силы трения о дно водоема обозначены как τ^b и вычисляются с помощью соотношения $\tau^{i,b} = \mu |u| u_i$, где μ - коэффициент трения, $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ - модуль скорости потока.

Коэффициенты трения являются заданными величинами и для морских акваторий составляют $\mu = 2,6 * 10^{-3}$, [8] и $\gamma = 3.25 * 10^{-6}$, [16]. Скорость ветра также задается из данных натуральных наблюдений и может зависеть от времени.

В правые части уравнений движения входит сила Кориолиса f^{cor} с компонентами $f_x^{cor} = f^c u_y$, $f_y^{cor} = -f^c u_x$ где $f^c = 2\Omega \sin \phi = \frac{2\pi}{T} \sin \phi$ - параметр Кориолиса, $\Omega = 2\pi/T = 7.2921 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ - угловая скорость вращения Земли, $T = 86400$ - период суточного вращения Земли в сек, ϕ - широта точки в градусах, отсчитываемая от экватора.

Область решения задачи изображена на Рис. 1 и представляет собой акваторию Азовского моря, Керченский пролив и прилегающую к нему часть акватории Черного

моря. Включение Керченского пролива в рассматриваемую область позволяет оценить влияние сейшевых колебаний Азовского моря на уровень поверхности и течения в зоне пролива.

Рассматриваемая область расположена в пределах от $34^{\circ}45'6''$ в.д. до $39^{\circ}29'38''$ в.д. и от $44^{\circ}48'4''$ с.ш. до $47^{\circ}16'12''$ с.ш. соответственно. Топология дна акватории задана на сетке с шагами $8''$. В силу относительно небольших линейных размеров Азовского моря по отношению к радиусу Земли задача рассматривается в декартовой системе координат. Используется равномерная прямоугольная сетка с шагами 250×250 м. В качестве нулевой отметки выбрано положение береговой линии, соответствующей невозмущенному уровню моря.

Из наблюдений известно, что в акватории Азовского моря в результате продолжительного (в течение нескольких суток) действия однонаправленного ветра может формироваться градиент уровня жидкости, разрушение которого приводит к появлению сейши. Такая сейша представляет собой аналог стоячей волны внутри бассейна. Далее приведен пример расчета эволюции уровня поверхности и скорости течения для типичного сейшевого колебания с начальной амплитудой в один метр.

2. Регуляризованные уравнения мелкой воды

Упомянутый в введении способ регуляризации применялся к уравнениям Навье–Стокса и Эйлера и позволил строить эффективные численные алгоритмы для их решения, которые изложены, например, в [18]–[20].

Регуляризованные уравнения мелкой воды и способ их построения описаны в [10]. Здесь мы приведем уже полученные уравнения с учетом сил трения и силы Кориолиса. Регуляризованные уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= h^* \left(f^c u_y - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \tau^{x,w} - \tau^{x,b} \\ \frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= h^* \left(-f^c u_x - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \tau^{y,w} - \tau^{y,b} \end{aligned} \quad (2)$$

Величины j_{mx} и j_{my} имеют физический смысл регуляризованного потока жидкости и выражаются в виде:

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), \quad j_{my} = h(u_y - w_y), \quad (3)$$

где hu_i - есть поток жидкости в рамках приближения мелкой воды, а w_i - регуляризующая поправка к скорости, которая выражается следующим образом:

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+b)}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+b)}{\partial y} \right) \quad (5)$$

Компоненты тензора $\Pi_{i,j}$ имеют следующий вид:

$$\Pi_{xx} = u_x w_x^* + R^* + \Pi_{NSxx}, \quad \Pi_{yx} = u_y w_x^* + \Pi_{NSyx} \quad (6)$$

$$\Pi_{xy} = u_x w_y^* + \Pi_{NSxy}, \quad \Pi_{yy} = u_y w_y^* + R^* + \Pi_{NSyy}, \quad (7)$$

где

$$w_x^* = \tau h \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$w_y^* = \tau h \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$R^* = g\tau h \left(\frac{\partial h u_x}{\partial x} + \frac{\partial h u_y}{\partial y} \right) \quad (10)$$

По сравнению с классическими уравнениями в приближении мелкой воды, здесь появились новые члены, которые являются малыми величинами порядка $O(\tau)$. Для сглаживания численного решения используются также компоненты тензора вязких напряжений Навье-Стокса, в которых коэффициент вязкости связывается с параметром τ . Эти компоненты добавляются в величину $\Pi_{i,j}$ (6) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{NSxx} &= \tau \frac{gh^2}{2} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \Pi_{NSxy} &= \Pi_{NSyx} = \tau \frac{gh^2}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \Pi_{NSyy} &= \tau \frac{gh^2}{2} 2 \frac{\partial u_y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Величина h^* имеет вид

$$h^* = h - \tau \left(\frac{\partial h u_x}{\partial x} + \frac{\partial h u_y}{\partial y} \right). \quad (11)$$

Система уравнений (2) тесно связана с исходной системой уравнений мелкой воды и при $\tau = 0$ переходит в систему (1). Вид слагаемых с коэффициентом τ определяется видом исходных уравнений, поэтому стационарные решения исходной системы (1) являются стационарными решениями системы (2). Одним из таких решений является решение задачи о "покоящемся озере". Изучение многочисленных связей регуляризованных

уравнений гидродинамики с их классическими аналогами приведено, в частности, в [21], [22].

В качестве граничных условий для регуляризованных уравнений мелкой воды были выбраны условия отражения для h с учетом топологии дна и условия непротекания в оставшейся части области в виде

$$\frac{\partial(h+b)}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad u_n = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0. \quad (12)$$

В зависимости от положения границы, индекс n обозначает нормальную к границе производную по x или y , а индекс τ обозначает касательную компоненту вектора скорости на границе области, то есть u_x или u_y .

3. Разностный алгоритм

Для численного решения системы уравнений (2) используется явная по времени разностная схема, в которой используется интегро-интерполяционный метод с аппроксимацией пространственных производных в потоках центральными разностями. Для расчетов применяются равномерные пространственные сетки.

Значения $h(x, y, t)$ и $u(x, y, t)$ задаются в узлах пространственной сетки (i, j) , значения в полуцелых точках $i \pm 1/2, j$ и $i, j \pm 1/2$ вычисляются как среднее арифметическое значение величин в соседних узлах, например, $h_{i\pm 1/2, j} = 0.5(h_{i, j} + h_{i\pm 1, j})$. Значения в центрах ячеек определяются как среднее арифметическое от значений в соседних узлах, например, $h_{i+1/2, j+1/2} = 0.25(h_{i, j} + h_{i+1, j} + h_{i, j+1} + h_{i+1, j+1})$. Аналогично аппроксимируются величины u_x, u_y и b . Поточковые величины на ребрах шаблона определяются через регуляризирующие добавки:

$$\begin{aligned} j_{i\pm 1/2, j}^x &= h_{i\pm 1/2, j} (w_{i\pm 1/2, j}^x - w_{i\pm 1/2, j}^x) \\ j_{i, j\pm 1/2}^y &= h_{i, j\pm 1/2} (w_{i, j\pm 1/2}^y - w_{i, j\pm 1/2}^y) \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее для удобства использован верхний индекс для обозначения x и y компонент. Значения $w_{i+1/2, j}^x, w_{i-1/2, j}^x$ и $w_{i, j+1/2}^y, w_{i, j-1/2}^y$ также определяются на ребрах шаблона. Входящие в эти выражения производные аппроксимируются центральными разностями. Разностная запись этих величин приведена в [11].

Величины $\Pi_{i, j}$ определяются через регуляризирующие добавки аналогично (13). В качестве примера выпишем разностную аппроксимацию $w^{*, x}$

$$\begin{aligned}
w_{i+1/2,j}^{*,x} &= \tau_{i+1/2,j} h_{i+1/2,j} \left(u_{i+1/2,j}^x \frac{u_{i+1,j}^x - u_{i,j}^x}{\Delta x} + \right. \\
& \left. u_{i+1/2,j}^y \frac{u_{i+1/2,j+1/2}^x - u_{i+1/2,j-1/2}^x}{\Delta y} + gh_{i+1/2,j} \frac{h_{i+1,j} + b_{i+1,j} - h_{i,j} - b_{i,j}}{\Delta x} \right) \\
w_{i-1/2,j}^{*,x} &= \tau_{i-1/2,j} h_{i-1/2,j} \left(u_{i-1/2,j}^x \frac{u_{i,j}^x - u_{i-1,j}^x}{\Delta x} + \right. \\
& \left. u_{i-1/2,j}^y \frac{u_{i-1/2,j+1/2}^x - u_{i-1/2,j-1/2}^x}{\Delta y} + gh_{i-1/2,j} \frac{h_{i,j} + b_{i,j} - h_{i-1,j} - b_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \\
w_{i,j+1/2}^{*,x} &= \tau_{i,j+1/2} h_{i,j+1/2} \left(u_{i,j+1/2}^x \frac{u_{i+1/2,j+1/2}^x - u_{i-1/2,j+1/2}^x}{\Delta x} + \right. \\
& \left. u_{i,j+1/2}^y \frac{u_{i,j+1}^x - u_{i,j}^x}{\Delta y} + gh_{i,j+1/2} \frac{h_{i+1/2,j+1/2} + b_{i+1/2,j+1/2} - h_{i-1/2,j+1/2} - b_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} \right) \\
w_{i,j-1/2}^{*,x} &= \tau_{i,j-1/2} h_{i,j-1/2} \left(u_{i,j-1/2}^x \frac{u_{i+1/2,j-1/2}^x - u_{i-1/2,j-1/2}^x}{\Delta x} + \right. \\
& \left. u_{i,j-1/2}^y \frac{u_{i,j}^x - u_{i,j-1}^x}{\Delta y} + gh_{i,j-1/2} \frac{h_{i+1/2,j-1/2} + b_{i+1/2,j-1/2} - h_{i-1/2,j-1/2} - b_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x} \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично аппроксимируются величины $w^{*,y}$, R^* и $\Pi_{i,j}^{NS}$. Разностная аппроксимация величины h^* , обеспечивающая выполнение условия хорошей балансировки (well-balance), приведена в [11].

Применяя интегро-интерполяционный метод, получаем явную по времени разностную схему для системы уравнений (2) в виде

$$\hat{h}_{i,j} = h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (j_{i+1/2,j}^x - j_{i-1/2,j}^x) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (j_{i,j+1/2}^y - j_{i,j-1/2}^y), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{i,j} \hat{u}_{i,j}^x &= h_{i,j} u_{i,j}^x + \Delta t \left(\tau_{i,j}^{x,w} - \tau_{i,j}^{x,b} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Pi_{i+1/2,j}^{xx} - \Pi_{i-1/2,j}^{xx} \right) - \\
& \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1/2,j}^x j_{i+1/2,j}^x - u_{i-1/2,j}^x j_{i-1/2,j}^x \right) - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{i+1/2,j}^2 - h_{i-1/2,j}^2) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\Pi_{i,j+1/2}^{yx} - \Pi_{i,j-1/2}^{yx} \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(u_{i,j+1/2}^x j_{i,j+1/2}^y - u_{i,j-1/2}^x j_{i,j-1/2}^y \right) + \Delta t h_{x,i,j}^* \left(f^c u_{i,j}^y - g \frac{b_{i+1/2,j} - b_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right), \\
\hat{h}_{i,j} \hat{u}_{i,j}^y &= h_{i,j} u_{i,j}^y + \Delta t \left(\tau_{i,j}^{y,w} - \tau_{i,j}^{y,b} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Pi_{i+1/2,j}^{xy} - \Pi_{i-1/2,j}^{xy} \right) - \\
& \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1/2,j}^y j_{i+1/2,j}^x - u_{i-1/2,j}^y j_{i-1/2,j}^x \right) - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta y} (h_{i,j+1/2}^2 - h_{i,j-1/2}^2) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\Pi_{i,j+1/2}^{yy} - \Pi_{i,j-1/2}^{yy} \right) - \\
& \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(u_{i,j+1/2}^y j_{i,j+1/2}^y - u_{i,j-1/2}^y j_{i,j-1/2}^y \right) + \Delta t h_{y,i,j}^* \left(-f^c u_{i,j}^x - g \frac{b_{i,j+1/2} - b_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь величины с крышкой \hat{h} , \hat{u} относятся к верхнему временному слою, Δt обозначает шаг по времени, Δx и Δy - шаги разностной сетки по пространству.

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом τ , величина которого связывается с шагами пространственной сетки и вычисляется в виде:

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2c}, \quad c = \sqrt{gh(x, y, t)}, \quad (17)$$

где c - скорость распространения малых возмущений, рассчитанная в приближении модели мелкой воды, $0 < \alpha < 1$ - численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. В большинстве расчетов $\alpha = 0.1$. Шаг по времени выбирается в соответствии с условием Куранта, которое для данной задачи имеет вид

$$\Delta t = \beta \frac{\Delta x + \Delta y}{2c_{max}}, \quad (18)$$

число Куранта $0 < \beta < 1$ зависит от величины параметра регуляризации τ в виде $\beta = \beta(\alpha)$ и подбирается в процессе вычислений для обеспечения монотонности численного решения. В данных расчетах $\beta = 0.5$.

Таким образом, разностная схема включает в себя два настраиваемых параметра - число Куранта β и параметр регуляризации α , которые определяют точность и устойчивость численного решения.

4. Замечания о численной реализации

Задача рассматривается в декартовой системе координат на равномерной прямоугольной сетке, соответствующей имеющимся данным по рельефу Азовского моря и прилегающих территорий. Шаги сетки составляют $\Delta x = \Delta y = 250$ метров. Число узлов сетки $1521 \cdot 1091 = 1659411$. Шаг по времени составляет $\Delta t = 10,4$ с.

Численная аппроксимация силы Кориолиса, содержащая множитель $\sin\phi$, зависящий от широты в геоцентрической системе координат, происходит без преобразования данного множителя в декартову систему координат. В разностной схеме значения рассчитываются в каждом узле сетки с постоянным шагом 8 секунд по широте.

Для упрощения расчетов течения вблизи береговой линии граница уровня береговой линии была дополнительно поднята на 5 метров. Это позволило избежать использования при решении задачи алгоритма расчета зон сухого дна, наличие которых не существенно влияет на сейшевые колебания.

В большинстве современных моделей, описывающих циркуляцию морей и океанов, в качестве неизвестной толщины слоя жидкости используется величина η , отсчитываемая от равновесного уровня неподвижной жидкости h_0 . При этом ось Z направлена вниз. Таким образом, за ноль принимается уровень поверхности моря, и глубина моря строго

положительна. В используемом авторами численном алгоритме неизвестной является высота уровня h , отсчитываемая от уровня дна с профилем b . За нулевую отметку принимается максимальная глубина водоема см. Рис. 2. Для визуализации полученных в расчетах данных о высоте поверхности воды используется величина

$$\eta = h + b - \xi_0 = h - h_0,$$

где $\xi_0 = h_0 + b$ - положение уровня жидкости в неподвижном равновесном водоеме.

Для проверки сбалансированности (well-balance) разностной схемы был проведен расчет так называемой задачи о неподвижном озере. Эта задача заключается в численной проверке очевидного факта, что при отсутствии внешних воздействий, в данном случае ветра, неподвижная в начальный момент времени поверхность водоема $h_0 + b = \xi_0$ остается в покое, и влияние неровностей дна не приводит к появлению нефизичных колебаний. Расчет проведен вплоть до двух суток. Максимальные отклонения от равновесного уровня наблюдались в начальный момент времени и составили порядка 1 сантиметра. С течением времени колебания затухали. На фоне рассчитанных колебаний уровня эти погрешности оказываются малыми.

Начальные условия для задачи о сейше ставятся следующим образом. Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) в акватории моря задан равномерный градиент уровня моря, который имеет уровень +1 метр от равновесного значения h_0 в верхней правой части области и уровень -1 метр в левой нижней. Численный алгоритм задания такого градиента заключается в разделении уровней от +1 метра до -1 метра на 1000 подуровней, каждый из которых занимает одинаковую площадь. Последнее обеспечивает сохранение общего количества жидкости в расчетной области. На рисунке Рис. 3 указан начальный профиль высоты в метрах. Полагаем, что в начальный момент времени жидкость неподвижна $u_x = u_y = 0$. В приведенных далее расчетах скорость ветра также полагается нулевой.

Большинство расчетов было произведено до одной недели реального времени.

Численный расчет на период времени 72 часа занимает около 8 часов компьютерного времени на персональном компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i5 с частотой 2.8 GHz. Программа написана на языке Си. Оптимизация программы не проводилась, хотя по предварительным оценкам она может ускорить расчет в 3-5 раз.

5. Результаты расчета сейшевых колебаний

Первая серия расчетов сейшевых колебаний была проведена без учета трения о дно бассейна ($\mu = 0$). Распределения уровня воды на четыре характерных момента времени $t = 3, 9, 15$ и 24 часа с момента начала колебания приведены на Рис. 4. Рис. 5 демонстрирует соответствующие линии тока.

На графиках Рис.4 показаны перемещения максимального и минимального уровней моря: так, в момент времени $t = 0$ максимальный уровень находится в северо-восточной части Азовского моря, минимальный - в западной и юго-западной; при $t = 3$ часа максимальный уровень находится в северной и северо-западной части моря, минимальный - в юго-восточной части области; при $t = 9$ часов максимальный уровень находится в южной части области, минимальный - в северной и северо-восточной; при $t = 15$ часов максимальный - в восточной части области, минимальный - в западной и северо-восточной (в Таганрогской бухте); наконец, при $t = 24$ часа максимум вновь находится в северо-восточной части моря и западной части моря, минимум - в восточной и центральной части моря. Таким образом, за 18-24 часа в каждой зоне максимум успел смениться минимумом и наоборот, что говорит о наличии периодического движения массы воды в акватории против часовой стрелки. Это вращательное движение обусловлено влиянием силы Кориолиса.

Рис. 5 демонстрирует наличие сложного нестационарного циркуляционного течения во всей акватории. Основная направленность линий тока также смещается против часовой стрелки: при $t = 3$ часа они направлены с востока на запад; при $t = 9$ - с севера на юг; при $t = 15$ часов - с юга на север; при $t = 24$ часа - с запада на восток. Наиболее сильные течения наблюдаются в Таганрогской бухте.

Из Рис. 4 и 5 следует, что периоды колебаний уровня в разных областях акватории отличаются и зависят от места их расположения. Практически интересным представляется изучение движения уровня поверхности и течений в крупных портах Азовского моря, расположение которых указано на Рис. 4. На основе четырех городов в различных частях Азовского моря - Гениченск, Таганрог, Керчь и Бердянск мы приведем основные характеристики эволюции уровня моря. Соответствующие кривые обозначены сплошными линиями.

Далее приведены графики эволюции уровня моря на каждый час до 3-х суток включительно. Начнем рассмотрение с города Таганрог, находящегося в северо-восточной части области. Для этого зафиксируем точку с координатами $x = 337432\text{м}$ и $y = 262004\text{м}$, которая соответствует порту города Таганрог. Изменение уровня в точке с течением времени показано на Рис. 6. Здесь и в последующих графиках ось x соответствует времени эволюции профиля в часах. В соответствии с начальными условиями в начальный момент времени поднятие уровня воды составляет +1 метр. В первые часы решения уровень жидкости плавно понижается и достигает минимума -1.68м при $t = 17$ часов. Таким образом, за 17 часов изменение составило 2.7 метра. После этого наблюдается еще более резкое возрастание уровня: при $t = 24$ часа высота жидкости составляет +1.7 метров, т.е. за 7 часов уровень воды поднялся более чем на 3 метра. Такое повышение уровня может являться серьезной угрозой как для порта, так и для города. Стоит обратить внимание на то, что второй максимум значительно выше первого, то

есть во время своего оборота сейшевое течение принесло увеличенную водную массу в Таганрогскую бухту. После наплыва вода сходит из бухты, причем гораздо более резко, достигая второго минимума -0.4 за 5 часов. Следующий максимум $+0.6$ м наблюдается при $t = 53$ часа, после чего вода также стремительно покидает бухту. Таким образом, рассчитанные колебания сейши в Таганроге характеризуются очень резкими и большими изменениями уровня.

Двигаясь с востока на Запад, рассмотрим город Бердянск, находящийся на Украине, с координатам $x = 162286$ м и $y = 211211$ м. График высоты уровня моря показан на Рис. 7. В начальный момент времени уровень моря практически совпадает с равновесным. Далее, в течении трех часов образуется резкий пик с максимальной величиной $+0.75$ м при $t = 4$ часа. Затем наблюдается дополнительный, более пологий максимум $+0.15$ м при $t = 12$ часов. Эта картина повторяется со временем: так следующий главный максимум появляется при $t = 18$ часов и побочный - при $t = 24$ часа; затем, при $t = 32$ и $t = 38$ часов, после чего внешний вид колебаний несколько меняется: сначала идет более пологий пик при $t = 44$ и $t = 58$ часов, затем - более острый при $t = 51$ и $t = 65$ часов. Наличие побочного максимума связано с отражением течения от западного берега Азовского моря. Второй главный максимум появляется после того, как масса воды сделала полный оборот в акватории Азовского моря - таким образом, период колебаний для города Бердянск составляет примерно 13 часов. Аналогично образуется третий максимум, однако, он выше второго - это происходит за счет перемещения водных масс из Таганрогской бухты, где период колебаний составляет примерно 24-26 часов.

Двигаясь далее на Запад, рассмотрим город Гениченск с координатами $x = 7491$ метров и $y = 149229$ метров. Географически он расположен на берегу не самого Азовского моря, а в Улютском лимане. График высоты уровня моря показан на Рис. 8. Его внешний вид похож на соответствующий график для города Бердянска. Однако на этом графике колебания более чистые, без шумов. Это связано с его географическим расположением на берегу лимана, сюда не доходят отраженные от противоположных берегов массы воды. Период колебаний составляет 15 часов. На графике третий пик значительно выше второго за счет перетекания водных масс из Таганрогской бухты.

Рассмотрим колебания уровня моря в Керченском проливе районе порта в г. Керчь с координатами $x = 138847$ метров и $y = 56282$ метров, Рис. 9. Этот график сильно зашумлен, и повышение уровня моря здесь довольно незначительно по сравнению с аналогичными графиками для других городов. Последнее показывает, что в Керченский пролив сейша практически не заходит.

Таким образом, были исследованы собственные сейшовые колебания Азовского моря с начальной амплитудой 1 метр. Определены периоды этих колебаний в характерных точках, которые составили от 12 до 16 часов в основных портах Азовского моря и 24-28 часов в Таганрогской бухте. Вблизи городов уставлено наличие слабых скоростей

и течений, связанных с сейшовыми колебаниями. В численных расчетах установлено, что сейшевое течение не проникает в Керченский пролив. Отметим, что для городов Таганрог, Гениченск, Приморо-Ахтарск повышение уровня может быть довольно существенным.

Рассмотрим ту же задачу, но теперь учтем действие силы трения согласно, e.g., (2). Коэффициент μ выбран равным $2,6 \cdot 10^{-3}$ согласно [8].

Распределения уровня воды на четыре характерных момента времени $t = 3, 9, 15$ и 24 часа с момента начала колебания приведены на Рис. 10. Общий характер сейшовых колебаний остается неизменным. Сила трения вносит дополнительное затухание в систему, в результате чего уже за один период амплитуда колебаний сокращается в 8 раз по сравнению с амплитудой без силы трения, а за три периода сейша практически полностью исчезает.

Переходя к рассмотрению колебаний уровня моря в портах Азовского моря, отметим, что в целом период колебаний остался неизменным, в то время, как за счет силы трения амплитуды колебаний и скорости течений сильно уменьшились.

График изменения уровня моря с течением времени для города Таганрог приведен на Рис. 6.. За счет действия силы трения из бухты вытекает меньшая водная масса, в результате чего возникает обертоном с периодом колебаний 17 часов согласно рис. 6. Его наличие обусловлено сложными береговыми границами залива и бухты. Отметим визуальные различия графиков с силой трения и без. Максимумы стали более пологими по сравнению с вариантом без трения. Максимальный размах колебаний достигает 0.1 метра и быстро затухает со временем.

Аналогичные характеристики (без изменения периода колебаний) течения наблюдаются и в других городах. Рассмотрим город Гениченск, где наблюдались чистые сейшовые колебания. График уровня моря приведен на Рис. 8. Видно сильное затухание с максимальным размахом амплитуды 0.21 метр. Основные максимумы немного сдвигаются по времени вправо, но период колебаний остается неизменным - 16 часов.

Таким образом, было изучено влияние силы трения на решение задачи о собственных сейшовых колебаниях. Коэффициент силы трения $\mu \sim 10^{-3}$ приводит к сильному затуханию решения: уже после 2-3 периодов уровень в Азовском море становится равновесным.

Полученные результаты в целом соответствует данным многолетних наблюдений [1] и результатам численного моделирования на основе альтернативных подходов. Кроме того полученные расчеты показывают, что собственное затухание разностной схемы, основанной на регуляризованных уравнениях мелкой воды существенно меньше естественной диссипации, определяемой донным трением.

6. Заключение

В работе предложен новый метод численного моделирования течений, применимый в масштабах морских акваторий. В качестве основы используются уравнения мелкой воды в потоковом виде, описывающие воздействие ветра, вращения Земли (силы Кориолиса), топографии дна и силы донного трения. В качестве основы численного алгоритма используется система регуляризованных уравнений мелкой воды. За счет регуляризации в системе уравнений появляется дополнительная диссипация, которая сглаживает численные осцилляции, что в свою очередь позволяет использовать явную конечно-разностную аппроксимацию уравнений с помощью центральных разностей.

На примере течения в акватории Азовского моря и Керченского пролива показано, что построенная схема обладает условием хорошей балансировки, то есть схема не приводит к появлению заметных искусственных осцилляций решения, вызванных влиянием неровностей дна.

Данный подход был применен для численного моделирования типичных для Азовского моря сейшевых колебаний с начальной амплитудой один метр. Были определены временные характеристики возникающих колебаний вблизи основных портов Азовского моря и рассчитаны поля скоростей, связанных с этими колебаниями. Установлено, что сейша не проникает в Керченский пролив, однако для ряда городов, например, Таганрог или Гениченск, перепады уровня могут достигать двух метров.

Показано, что учет силы трения с коэффициентом трения, известным из литературы, приводит к сильному затуханию решения: уже после 2-3 периодов уровень в Азовском море становится равновесным. Из этого сравнения следует, что собственная диссипация численного алгоритма существенно меньше естественной диссипации, связанной, в частности, с донным трением.

Известно, что основные особенности сейшевого колебания (период, высоты) слабо зависят от начального распределения высоты уровня, и определяются в основном исходным перепадом высот. Здесь приведен пример задачи с типичным равномерным начальным перепадом высот. Кроме того, были посчитаны варианты, в которых начальное распределение высоты уровня было нелинейным и определялось воздействием реального ветра, взятого из наблюдательных данных. Полученные результаты в целом соответствуют приведенным в работе, но и из-за своей громоздкости не вошли в текст.

Простота численного алгоритма, его точность совместно с невысокими вычислительными затратами и возможностями параллельной реализации, а также скрытые резервы данного метода для работы с неструктурированными сетками и задачами, включающими в себя зоны осушки и затопления, делают предложенный авторами алгоритм конкурентоспособным по сравнению с существующими дорогостоящими методами высоких порядков.

Авторы благодарны Н.А. Дианскому и В. В. Фомину за привлечения внимания авторов к задаче о моделировании ветровых воздействий в Азовском море, помощь в использовании данных по топографии дна и натурным наблюдениям, а также за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00048.

Список литературы

- [1] *Доценко С.Ф., Иванов В.А.* Природные катастрофы Азово-Черноморского региона // НАН Украины, Морской гидрофизический институт, Севастополь, 2010.
- [2] *В.Б. Залесный, А.В. Гусев, С.Н. Мошонкин* Численная модель гидродинамики Черного и Азовского морей с вариационной инициализацией температуры и солености // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. – 2013. – Т.49, No 6. –С. 699–716.
- [3] *V. B. Zalesny, N. A. Diansky, V. V. Fomin et al.* Numerical model of the circulation of the black sea and the sea of azov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2012. — Vol. 27, no. 1. — P. 95–111.
- [4] *Fomin V. V., Polozok A. A., Kamyshnikov R. V.* Wave and storm surge modelling for sea of azov with use of swan+adcirc // Geoinformation Sciences and Environmental Development: New Approaches, Methods, Technologies, Collection of articles of the II Internati, At Limassol, Cyprus. — Rostov-on-Don, 2014. — P. 111–116.
- [5] *G. G. Matishov, Yu. I. Inzhebeikin* Numerical study of the Azov sea level seiche oscillations // Oceanology, 2009, Vol. 49, No 4, pp. 445 - 452.
- [6] *Ю. Г. Филипов* Свободные колебания уровня Азовского моря // Метеорология и гидрология 2012 №2, с 78-83
- [7] *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Выч. мет. программирование, 13 №1 (2012), 290–297
- [8] Крукиер Л.А. Математическое моделирование гидродинамики Азовского моря при реализации проектов реконструкции его экосистемы. Математическое моделирование, 1991, т. 3, N 9, с. 3-20.
- [9] Экстремальные колебания уровня Азовского моря, включая Керченский пролив, в безледный период // <http://oceanography.ru/index.php/ru/component/jdownloads/viewdownload/6-/69>
- [10] *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т.51, №1, с.170–184.
- [11] *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2016, Т56, N 4, с. ???? в печати.

- [12] *Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С.* Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках. Математическое моделирование, 2013, том 25, № 3, с.75-88.
- [13] *Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С.* Математическое моделирование и визуализация течений жидкости в грузовой емкости газовева при его соударении с ледовым препятствием. Научная Визуализация, 2013, том 5, № 4, с.118-135.
- [14] *Елизарова Т.Г., Истомина М.А., Шелковников Н.К.* Численное моделирование формирования уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале. // Математическое моделирование, 2012, том 24, № 4, с.10
- [15] Г.И. Марчук, В.П. Дымников, В.Б. Залесный. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1967, 296 стр.
- [16] Н.А. Дианский. Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. Москва, Физматлит, 2013, 271 стр.
- [17] Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л., Гидрометеоиздат, 1977, 206 с.
- [18] *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва, Научный мир, 2007 – 351 с.
- [19] *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. //Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
- [20] *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. // М.: Макс Пресс, 2004
- [21] *Злотник А.А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2010, Т50, N 2, с. 325-337
- [22] Ю.В. Шеретов. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь,Тверской государственнй университет, 2016, 222с.

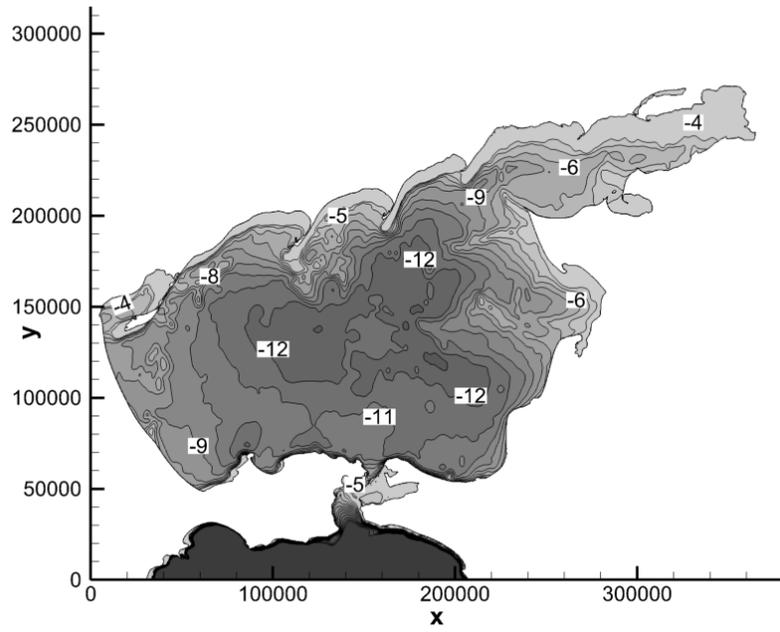


Рис. 1: Топография дна Азовского моря (глубина указана в м)

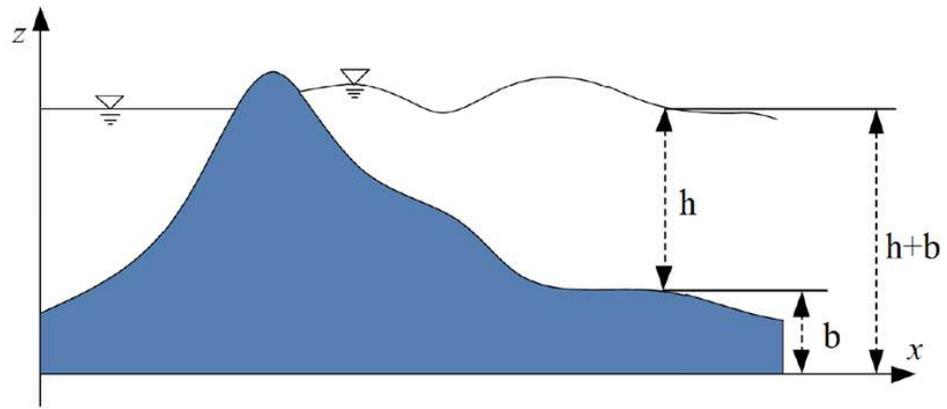


Рис. 2: Схема переменных уравнений мелкой воды

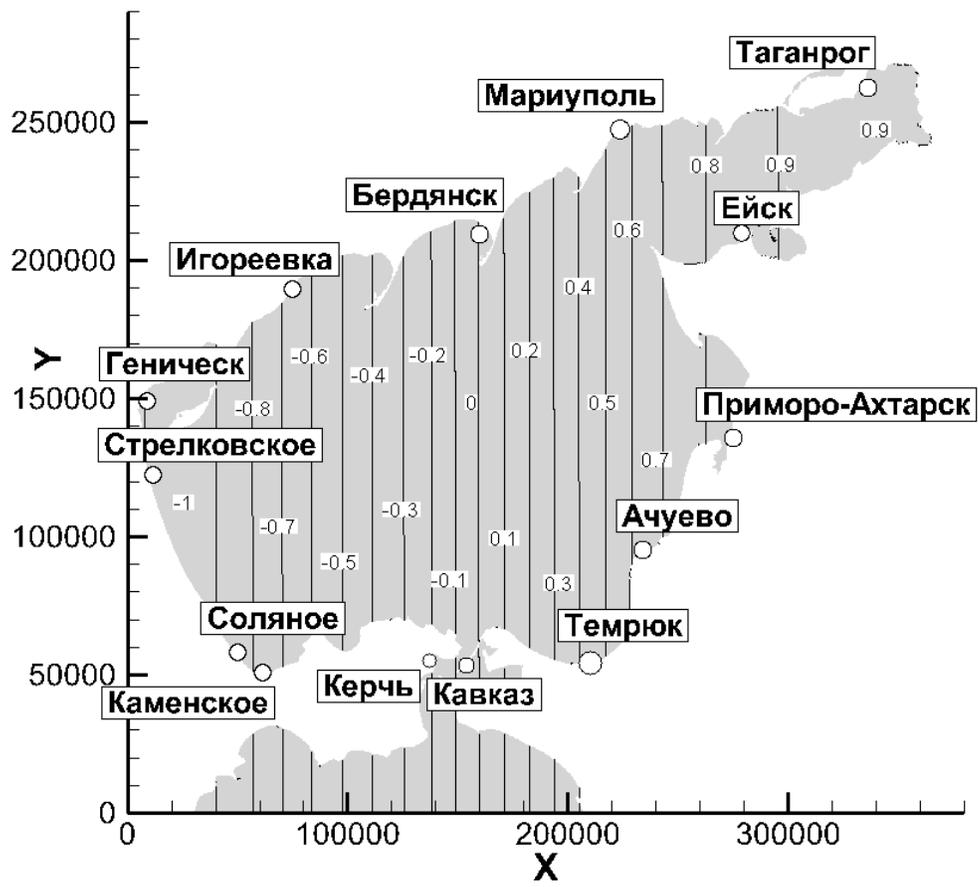
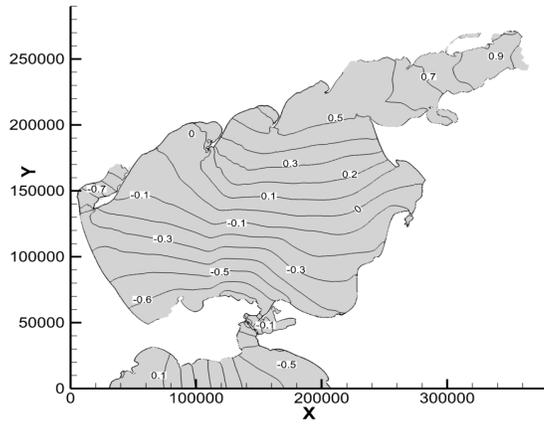
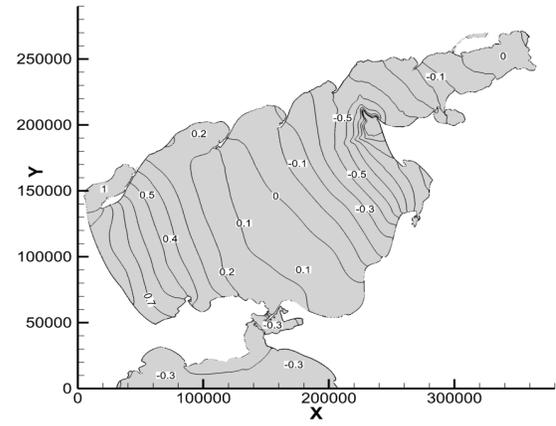


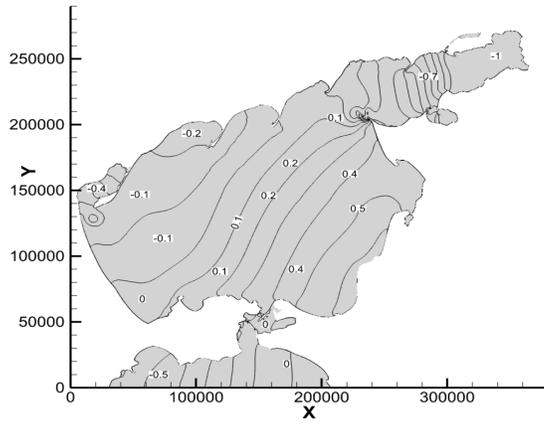
Рис. 3: Одномодовая сейша в бассейне Азовского моря. $t = 0$. Крупнейшие порты Азовского моря.



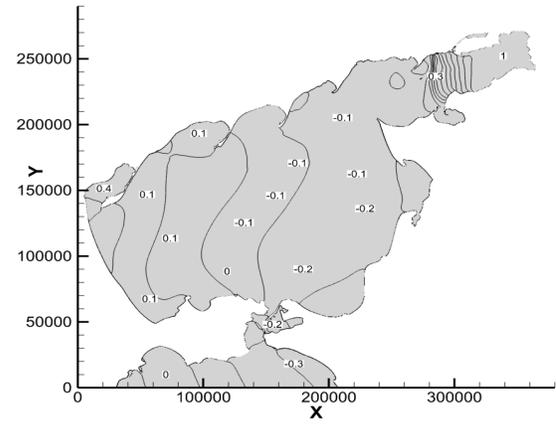
$t = 3\text{ч}$



$t = 9\text{ч}$

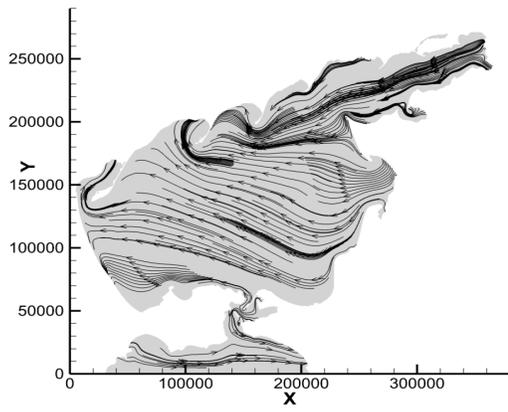


$t = 15\text{ч}$

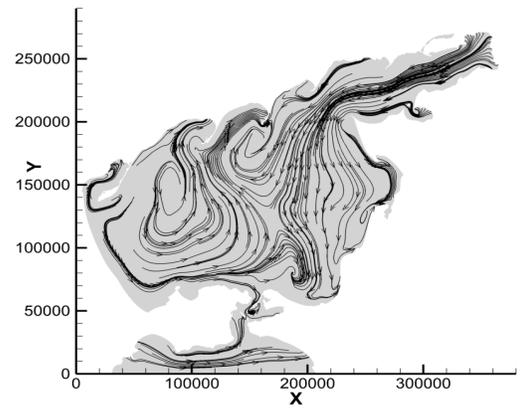


$t = 24\text{ч}$

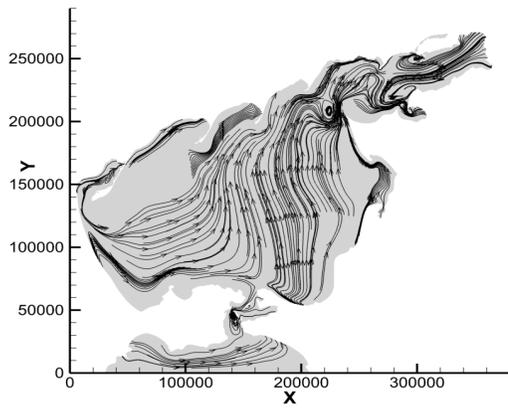
Рис. 4: Отклонение η уровня поверхности от равновесного значения в бассейне Азовского моря



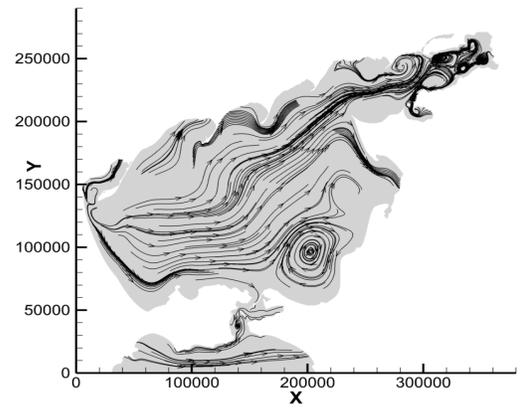
$t = 3\text{ч}$



$t = 9\text{ч}$



$t = 15\text{ч}$



$t = 24\text{ч}$

Рис. 5: Линии тока при сейшевых колебаний в Азовском море

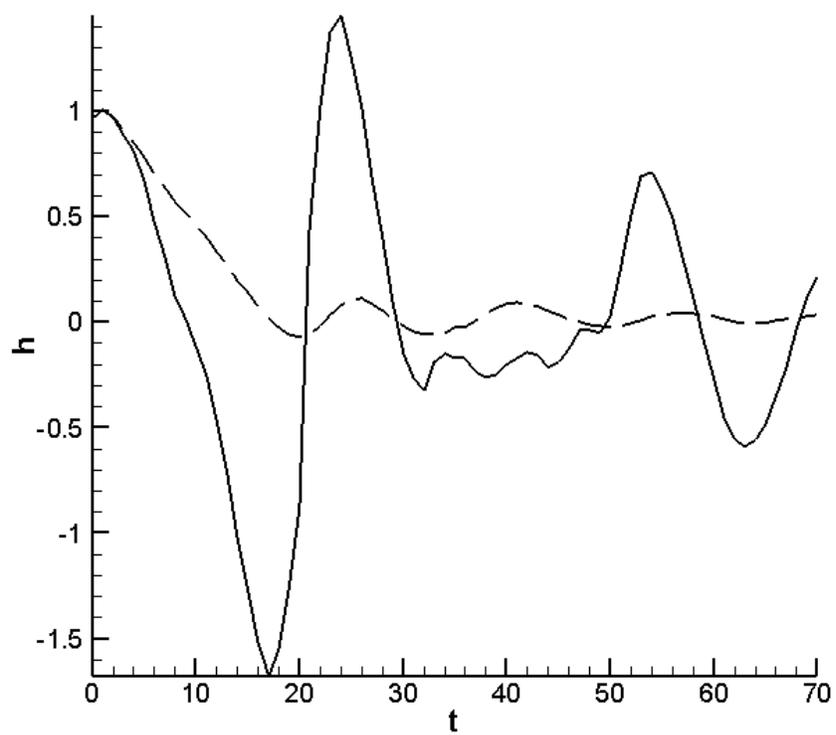


Рис. 6: Эволюция уровня моря h во времени в городе Таганрог. По оси абсцисс отложено время в часах. Пунктирная линия соответствует решению при ненулевом трении

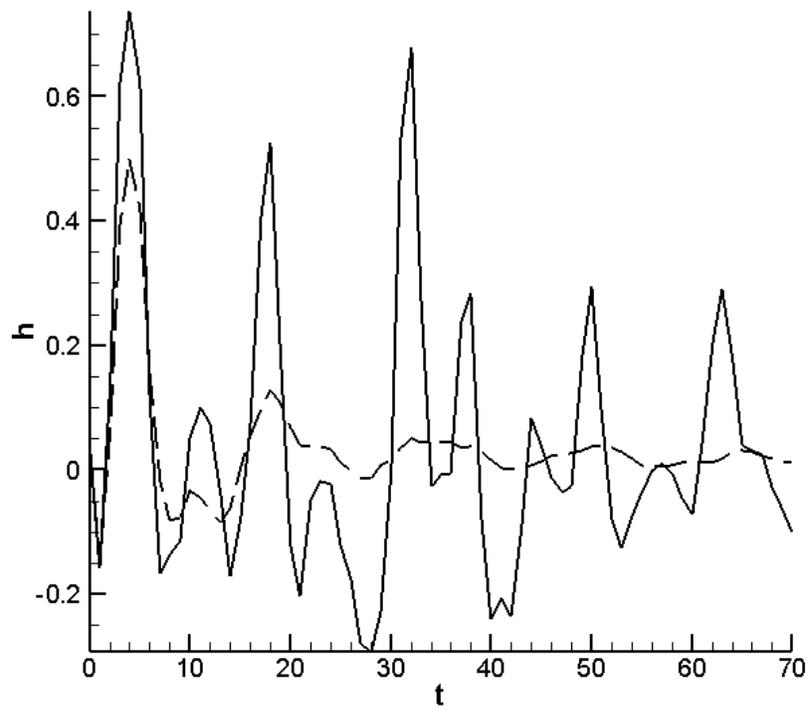


Рис. 7: Эволюция уровня моря h во времени в городе Бердянск. По оси абсцисс отложено время в часах. Пунктирная линия соответствует решению при ненулевом трении

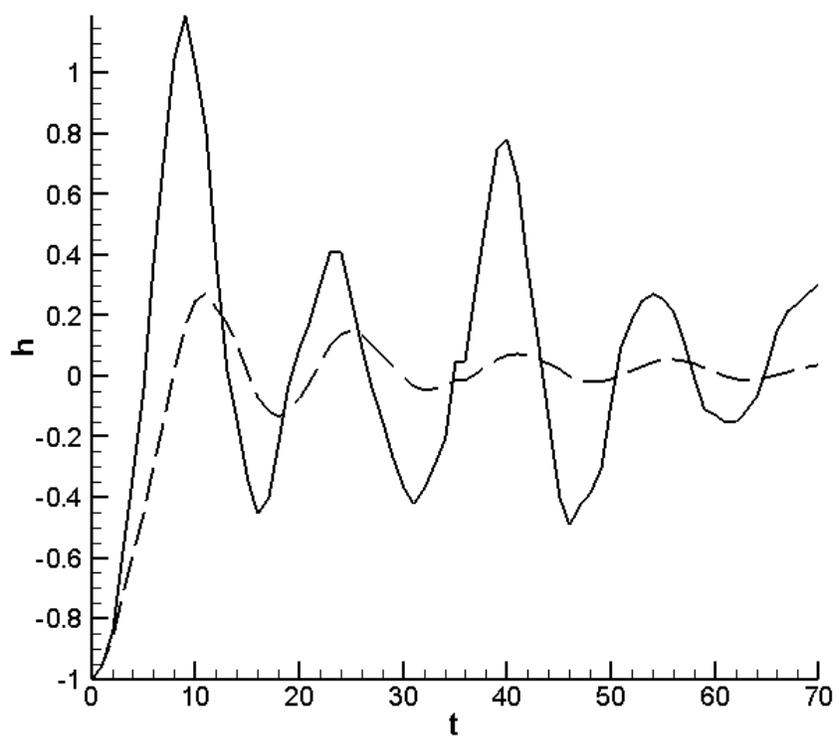


Рис. 8: Эволюция уровня моря h во времени в городе Геническ. По оси абсцисс отложено время в часах. Пунктирная линия соответствует решению при ненулевом трении

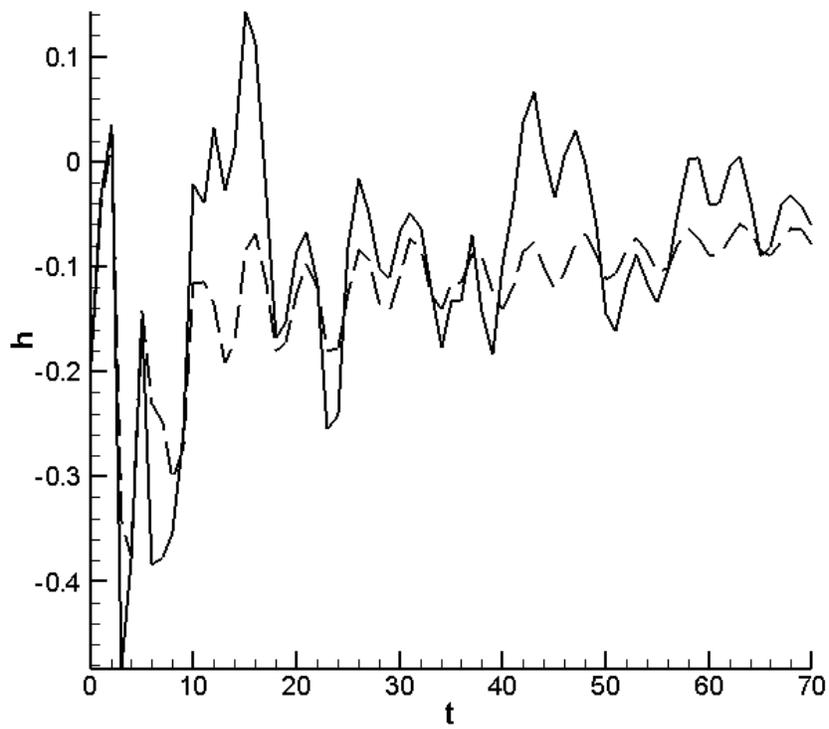
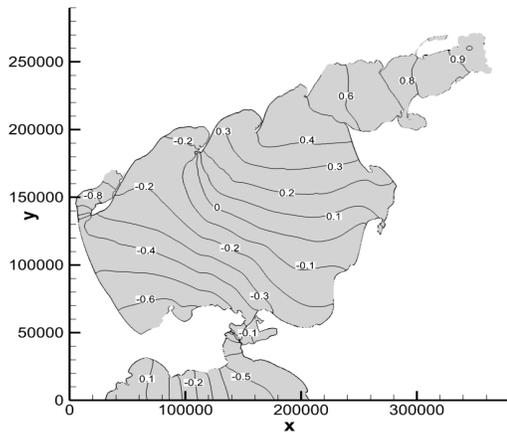
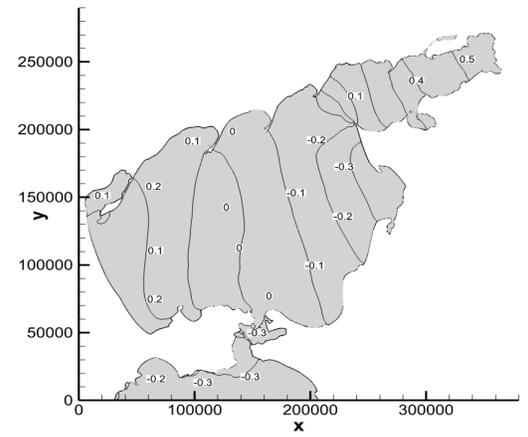


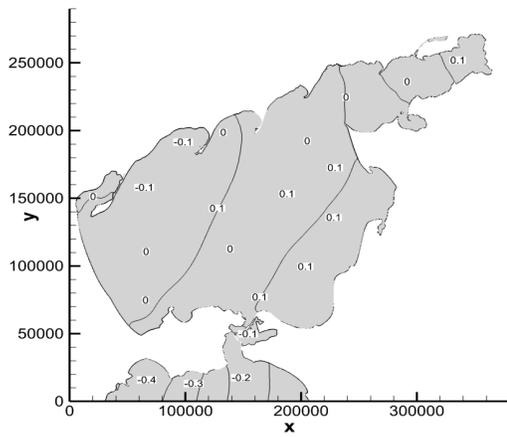
Рис. 9: Эволюция уровня моря h м во времени в городе Керчь. По оси абсцисс отложено время в часах. Пунктирная линия соответствует решению при ненулевом трении



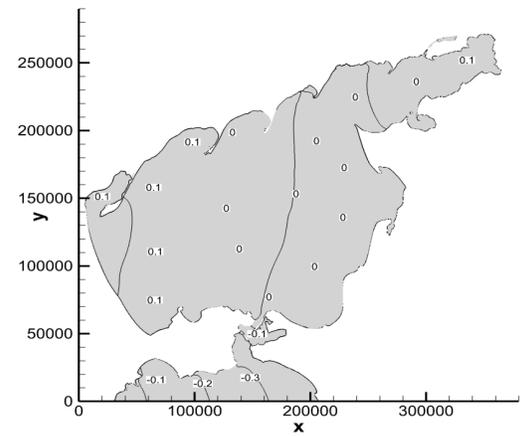
$t = 3\text{ч}$



$t = 9\text{ч}$



$t = 15\text{ч}$



$t = 24\text{ч}$

Рис. 10: Отклонение η уровня поверхности от равновесного значения в бассейне Азовского моря при учета силы трения о дно