

# Елизарова Татьяна Геннадьевна

Программа спецкурса для аспирантов кафедры математики  
Физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова  
сентябрь-декабрь 2011г.

*Курс читается по пятницам в ауд. 4-46 с 10-50 до 12-25.*

*Объем курса 3 часа x 18 недель = 54 учебных часа.*

## **Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости**

*Новые подходы, основанные на системах квазигазодинамических и  
квазигидродинамических уравнений.*

- 1. Уравнения газовой динамики.** Введение. Вывод уравнений газовой динамики на основе законов сохранения. Процедура осреднения для определения газодинамических величин. Пространственные и пространственно-временные средние. Преобразование Галилея. Интегральные законы сохранения как исходные постулаты. Переход к дифференциальным уравнениям. Уравнения Навье-Стокса и уравнения Эйлера. Диссипативный характер уравнений. Дивергентный и недивергентный вид уравнений. Барометрическая формула Лапласа.
- 2. Уравнения газовой динамики со сглаживанием.** Варианты сглаживания. Квазигидродинамическая и квазигазодинамическая (КГД) системы уравнений как осредненные по времени уравнения Навье-Стокса. Вектор плотности потока массы и параметр релаксации. Асимптотика КГД уравнений. Преобразование Галилея на примере одномерной системы уравнений. Барометрическая формула Лапласа.
- 3. Численный расчет 1Д газодинамических течений.** Основные понятия теории разностных схем по А.А.Самарскому – сеточный шаблон, виды аппроксимации, порядок аппроксимации в точке. Численные алгоритмы решения одномерных задач газовой динамики. Разностная аппроксимация одномерных нестационарных уравнений. Пример вязкого течения – задача о структуре ударной волны. Условия Рэнкина-Гюгонио. Пример невязкого течения - задача о распаде сильного разрыва. Введение искусственной диссипации на основе КГД модели.
- 4. Двумерные задачи газовой динамики.** Запись уравнений Навье-Стокса в плоской геометрии. Задача о течении газа в канале. Начальные и граничные условия. Пример точного решения – течение Куэтта. Течение Пуазейля. Безразмерный вид уравнений. Упрощенные формы уравнений газовой динамики. Задача Блазиуса и приближение Прандтля. Параболизированные уравнения. Приближение Стокса. КГД уравнения и их аналогия с уравнениями Навье-Стокса.

5. **Разностные алгоритмы решения 2Д уравнений газовой динамики.** Запись уравнений в потоковом виде и метод контрольного объема. Аппроксимация граничных условий с помощью фиктивных узлов. Однородность разностной схемы. Численное решение уравнений на прямоугольных сетках. КГД уравнения и искусственная диссипация. Особенности численного моделирования дозвуковых течений. Численное решение уравнений газовой динамики в областях сложной формы. Неструктурированные сетки и построение численного алгоритма. Примеры расчетов – нестационарное течение в канале со ступенькой в невязкой постановке. Течение в окрестности цилиндрического торца. Параметры торможения. Течение за обратным уступом. Течение в следе за цилиндром. Дорожка Кармана.
6. **Элементы кинетической теории I.** Уравнение Больцмана. Интеграл столкновений. H-теорема. Построение моментных уравнений. Равновесная функция распределения и уравнения Эйлера. Уравнения Навье-Стокса. Расчет средних величин в равновесном газе. Кинетические оценки для коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности.
7. **Элементы кинетической теории II.** Релаксационный вид интеграла столкновений. БГК приближение и построение моментных уравнений. Варианты БГК-приближения и построение моментных уравнений для неравновесных газов. Неравновесность между поступательными степенями свободы, неравновесность между поступательными и вращательными степенями свободы. Уравнения для описания бинарной смеси не реагирующих газов.
8. **Элементы кинетической теории III.** Численное моделирование течений разреженного газа. Свободномолекулярные течения. Течения с умеренными числами Кнудсена. Кнудсеновский слой и граничные условия Максвелла. Кинетическая модель разлет — столкновения. Метод прямого численного моделирования Монте-Карло. Демонстрация работы программы.  
**Кинетический вывод КГД уравнений.** Сглаженное по времени кинетическое уравнение и его свойства. Пример построения КГД системы для одномерного плоского течения. Представление КГД уравнений в виде законов сохранения. Коэффициенты релаксации и их обобщения. Моделирование неравновесных течений в рамках КГД подхода.
9. **Уравнения Навье-Стокса для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости.** Система уравнений. Теорема о диссипации кинетической энергии. Вид уравнений для плоского двумерного течения. Примеры точных решений – закон Архимеда, течения Куэтта и Пуазейля, нестационарные задачи Стокса и Рэлея. Приближение Буссинеска и модель тепловой конвекции. Безразмерный вид уравнений. Примеры точных решений – течения в плоском вертикальном и горизонтальном слое. Естественные переменные и переменные «функция тока – вихрь скорости». Уравнения Пуассона для давления и функции тока. Способы численного решения.

**10. КГД уравнения как основа для численных алгоритмов расчета несжимаемых течений.** КГД уравнения для вязкой несжимаемой жидкости и их сопоставление с системой уравнений Навье-Стокса. Примеры точных решений классических задач. Особенности постановки граничных условий. Разностный алгоритм. Примеры расчетов – течение в квадратной каверне, течение за обратным уступом. Тепловая конвекция в квадратной полости, течение расплава при низких числах Прандтля и моделирование колебательных режимов.

**11. Уравнения мелкой воды и численный алгоритм их решения.** Уравнения мелкой воды как баротропное приближение уравнений Эйлера. Число Фруда и аналогия с газодинамическими течениями. Регуляризованные уравнения мелкой воды и их свойства. Численные алгоритмы решения. Течения с сухим дном. Примеры расчетов.

Многопроцессорные вычислительные системы. Замечания о параллельной реализации численных алгоритмов.

## **Литература**

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва, Наука, 1986.
2. Берд Г.А. Молекулярная газовая динамика. Москва, 1981.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва, 1987.
4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, 1980.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика т.10. Москва, Физматлит, 2002.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978.
7. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно—временном осреднении. М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
8. Шеретов Ю.В. Математические модели гидродинамики. Учебное пособие. Тверь, Тверской гос. Университет, 2004.
9. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва, Научный мир, 2007.
10. [http:// elizarova.imamod.ru/](http://elizarova.imamod.ru/)