

УДК 517.958:533.7

## ДИССИПАТИВНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ В КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Т. Г. Елизарова\*), М. Е. Соколова

(кафедра математики)

E-mail: telizar@yahoo.com

**Приведен общий вид квазигазодинамических уравнений и вид дополнительных диссипативных слагаемых в цилиндрической и декартовой системах координат. Продемонстрировано влияние дополнительной диссипации на параметры течения газа в ударной волне.**

Проблема описания течений газа с помощью моделей, расширяющих возможности традиционных уравнений Навье–Стокса (НС), уже долгое время интересует исследователей. Одной из таких моделей является система квазигазодинамических (КГД) уравнений [1–4]. Эта система описывает поведение пространственно-временных средних — плотности, скорости и температуры, а не мгновенных пространственных средних, как в теории НС. КГД-уравнения отличаются от уравнений НС дополнительными дивергентными слагаемыми с параметром размерности времени в качестве коэффициента. Дополнительная диссипация, присутствующая в КГД-уравнениях, обеспечивает эффективность численных алгоритмов, построенных на их основе [1, 4, 5]. Представляется интересным изучение роли этой дополнительной диссипации на примере конкретных газодинамических течений. Отметим, что КГД-уравнения отличаются от других, близких по структуре систем, которые предлагались в работах [6, 7].

Течение газа описывается с помощью трех законов сохранения — массы, импульса и энергии, — которые могут быть представлены в индексном виде в обычных обозначениях как

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i J^i = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^k) + \nabla_i J^i u^k + \nabla^k p = \nabla_i \Pi^{ik}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i \frac{J^i}{\rho} (E + p) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ik} u_k). \quad (3)$$

Для замыкания системы (1)–(3) необходимо определить выражения для вектора плотности потока массы  $J^i$ , тензора вязких напряжений  $\Pi^{ik}$  и вектора теплового потока  $q^i$ .

Система уравнений НС описывает поведение мгновенных пространственных средних значений газодинамических параметров  $\rho$ ,  $u^i$ ,  $p$ . Соответствующие выражения для величин  $J^i_{NS}$ ,  $\Pi^{ik}_{NS}$  и  $q^i_{NS}$  приведены, например, в работе [8]. Если для вычисления  $\rho$ ,  $u^i$  и  $p$  использовать пространственно-временные средние, то систему уравнений (1)–(3) можно замкнуть двумя другими способами [2, 3]. Для идеального политропного газа такое замыкание имеет вид

$$J^i_{QGD} = \rho u^i - \tau (\nabla_j (\rho u^i u^j) + \nabla^i p), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ik}_{QGD} = & \Pi^{ik}_{NS} + \tau u^i (\rho u^j \nabla_j u^k + \nabla^k p) + \\ & + \tau g^{ik} (u_j \nabla^j p + \gamma p \nabla_j u^j), \end{aligned} \quad (5)$$

$$q^i_{QGD} = -k \nabla^i T - \tau \rho u^i \left( u^j \nabla_j \varepsilon + p u_j \nabla^j \left( \frac{1}{\rho} \right) \right) \quad (6)$$

и образует КГД-систему уравнений. Вторым способом замыкания образует КГД-систему, справедливую для описания течений неидеальных газов и жидкостей.

В приведенных уравнениях  $\nabla_i$  и  $\nabla^i$  — ко- и контравариантные производные,  $g^{ij}$  — метриче-

\*) Институт Математического моделирования РАН.

ский тензор,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$  — удельная внутренняя энергия,  $\gamma$  — показатель адиабаты. В выражения (4)–(6) входит релаксационный параметр  $\tau$ , который по порядку величины совпадает со средним временем свободного пробега молекул в газе и может быть связан с коэффициентом вязкости газа соотношением  $\tau \sim \mu/p$ , где  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\mu/p$  — максвелловское время релаксации. Таким образом, в КГД-уравнениях выделяются два типа диссипативных слагаемых — обычная вязкость НС, пропорциональная коэффициенту вязкости  $\mu$ , и дополнительная диссипация, пропорциональная коэффициенту  $\tau$ .

Пользуясь правилами тензорного анализа [9], выпишем вид КГД-добавок  $\tilde{J}_{QGD}^i$ ,  $\tilde{q}_{QGD}^i$ ,  $\tilde{\Pi}_{QGD}^{ik}$  к векторам плотности потока массы, тепловому потоку и тензору вязких напряжений в цилиндрической и декартовой системах координат.

В цилиндрической системе координат добавка к вектору плотности потока массы в физических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{J}_r^{QGD} &= \\ &= -\tau \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r u_z) + \frac{\partial p}{\partial r} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\varphi^{QGD} &= \\ &= -\tau \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_\varphi u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_\varphi u_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z^{QGD} &= \\ &= -\tau \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_z u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_z u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Добавка к вектору теплового потока выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_r^{QGD} &= -\tau \rho u_r \frac{1}{\gamma - 1} \times \\ &\times \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ &- \tau \rho u_r p \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\varphi^{QGD} &= -\tau \rho u_\varphi \frac{1}{\gamma - 1} \times \\ &\times \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ &- \tau \rho u_\varphi p \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_z^{QGD} = -\tau \rho u_z \frac{1}{\gamma - 1} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ &- \tau \rho u_z p \left[ u_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned}$$

Добавки к тензору вязких напряжений имеют достаточно громоздкий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{rr}^{QGD} &= \tau \rho u_r \times \\ &\times \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \\ &+ \tau \left[ u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^3} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{r\varphi}^{QGD} &= \tau \rho u_r \frac{1}{r} \times \\ &\times \left[ r u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - r^2 u_r u_\varphi + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{\Pi}_{rz}^{QGD} = \tau \rho u_r \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\varphi r}^{QGD} &= \tau \rho u_\varphi \times \\ &\times \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\varphi\varphi}^{QGD} &= \tau \rho u_\varphi \frac{1}{r} \times \\ &\times \left[ r u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r u_\varphi + r u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \tau \left[ u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r^3} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{\Pi}_{\varphi z}^{QGD} = \tau \rho u_\varphi \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right],$$

$$\tilde{\Pi}_{zr}^{QGD} = \tau \rho u_z \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{z\varphi}^{QGD} &= \tau \rho u_z \frac{1}{r} \times \\ &\times \left[ r u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r u_\varphi + r u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{zz}^{QGD} &= \tau \rho u_z \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \\ &+ \tau \left[ u_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Заметим, что, в отличие от тензора НС, этот дополнительный тензор несимметричен.

В декартовой системе координат приведенные выше выражения упрощаются: компонента добавки к вектору плотности потока массы имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{j}_x^{QGD} = & \\ = -\tau \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z) + \frac{\partial p}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

компонента вектора теплового потока:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x^{QGD} = & -\tau \rho u_x \frac{1}{\gamma - 1} \times \\ & \times \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ & -\tau \rho u_x p \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \end{aligned}$$

добавки к тензору вязких напряжений НС для диагональных элементов:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{xx}^{QGD} = & \tau \rho u_x \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \\ & + \tau \left( 2u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \tau \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned}$$

для недиагональных элементов:

$$\tilde{\Pi}_{xy}^{QGD} = \tau \rho u_x \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Путем циклической перестановки координат ( $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow x$  и  $u_x \rightarrow u_y$ ,  $u_y \rightarrow u_z$ ,  $u_z \rightarrow u_x$ ) можно получить все остальные компоненты.

В приведенных формулах дивергенция вычисляется следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Считая течение плоским, одномерным и параллельным оси  $Ox$ , рассмотрим плоскую неподвижную ударную волну, фронт которой перпендикулярен оси  $Ox$  и расположен в точке  $x = 0$ . Такое течение описывается системой КГД-уравнений (1)–(3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p), \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u^2 - (3 - \gamma) \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \left( \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3) + 3u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u(E + p) - \frac{\gamma \operatorname{Pr}^{-1}}{\gamma - 1} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \right. & \\ &\left. - (3 - \gamma) \mu u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \tau \left( \frac{(E + p)}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\rho u^2}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial x} + \right. & \end{aligned}$$

$$\left. + \rho u^2 p \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \tau \left( \rho u^3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2\rho u^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p u \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Здесь в правую часть уравнений вынесены дополнительные диссипативные слагаемые, пропорциональные  $\tau$ .

В качестве граничных условий на правой и левой границах используются условия Ренкина–Гюгонио. При проведении расчетов величины  $x$ ,  $t$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $E$  обезразмерены путем деления на  $\lambda_1$ ,  $\lambda_1/a_1$ ,  $\rho_1$ ,  $a_1$ ,  $\rho_1 a_1^2$ ,  $\rho_1 a_1^2$  (здесь  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега частиц в газе,  $a = (\gamma p/\rho)^{1/2}$  — скорость звука). Зависимость коэффициента вязкости от температуры выбирается в виде  $\mu \sim T^\omega$ . Индексы 1 и 2 соответствуют значениям газодинамических величин слева и справа от фронта волны. Число Маха вычисляется как  $\operatorname{Ma} = u/a$ . Расчеты проведены с использованием явной по времени разностной схемы второго порядка точности по пространству. Решение начально-краевой задачи получено с помощью процедуры установления по времени. Использованный алгоритм аналогичен описанному в работе [4].

Для выяснения роли дополнительной вязкости была проведена серия расчетов, в которых параметр  $\tau$  выбирался в интервале от 0 до  $5\tau_0$ , где  $\tau_0 = \mu/p$ . Уменьшение  $\tau$  приводило к сокращению необходимого для устойчивости схемы шага по времени и увеличению числа итераций до сходимости. Для обеспечения сходимости решения по сетке задача решалась на последовательности сгущающихся сеток с числом узлов по пространству 201, 601 и 1201.

На рис. 1–4 представлены профили газодинамических величин в ударной волне для случая  $\operatorname{Ma}_1 = 5$ ,  $\operatorname{Pr} = 2/3$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\gamma = 5/3$  ( $\operatorname{Pr}$  — число Прандтля). Плотность, температура и скорость на рис. 1, 2 дополнительно нормированы с помощью соотношений  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ ,  $\tilde{T} = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$ ,  $\tilde{u} = (u - u_2)/(u_1 - u_2)$ . Сплошная линия отвечает случаю  $\tau = \tau_0$ , пунктирная линия ( $\tau = 0$ ) — случаю уравнений Навье–Стокса, штрих-пунктир — варианту, когда параметр релаксации постоянен и вычислен по значениям параметров газа за ударной волной ( $\tau = \mu_2/p_2$ ). Линия с точками соответствует расчету этой задачи методом прямого численного моделирования Монте-Карло [4]. Эти данные можно считать эталонными.

Из графиков следует, что дополнительная диссипация практически не влияет на ширину ударной волны, которая вычисляется по максимальному наклону графика плотности и является одной из важных характеристик течения в ударной волне (рис. 1). Распределения скорости и вязких напряжений также слабо зависят от величины параметра  $\tau$  (рис. 1, 3). Наиболее чувствительными к выбору

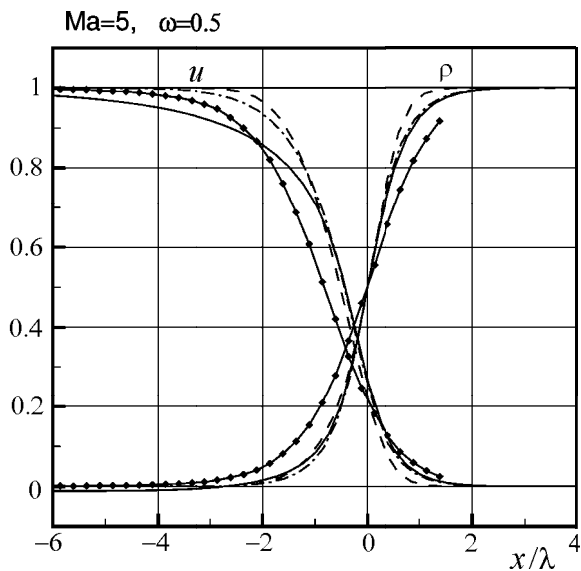


Рис. 1. Профили плотности и скорости

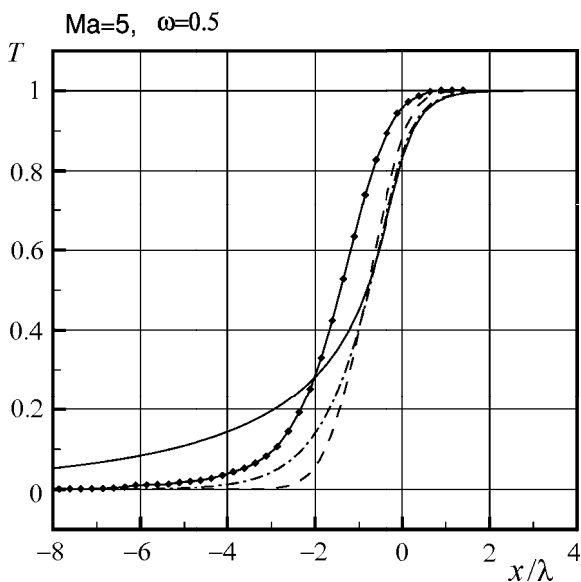


Рис. 2. Профили температуры

дополнительной вязкости оказываются температура (рис. 2) и тепловой поток (рис. 4\*): выбор  $\tau = \tau_0$  приводит к заметному увеличению температуры газа и теплового потока перед ударной волной, где времена свободного пробега частиц относительно велики. Наиболее близкие результаты к эталонным значениям дает вариант с выбором параметра релаксации  $\tau$  в соответствии с параметрами течения за ударной волной. Эти результаты для всех параметров течения по точности превосходят данные, полученные на основе уравнений Навье–Стокса.

Авторы выражают благодарность И.А. Граур за помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00061).

\*) Отметим, что в нашей работе [4] кривая для  $q$ , соответствующая уравнениям Навье–Стокса (фиг. 2), ошибочна.

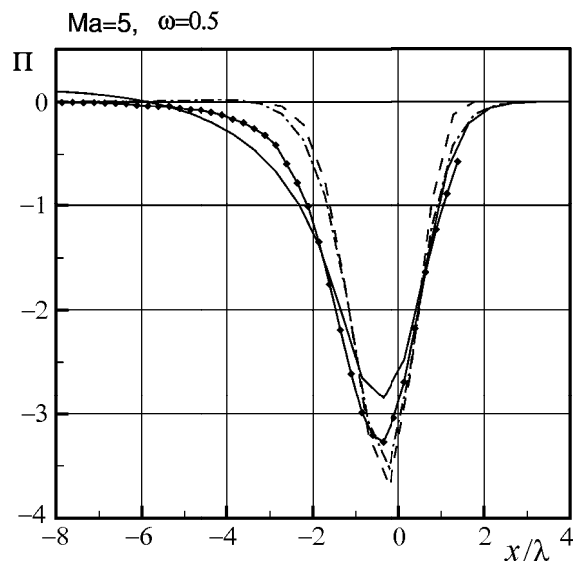


Рис. 3. Профили вязких напряжений

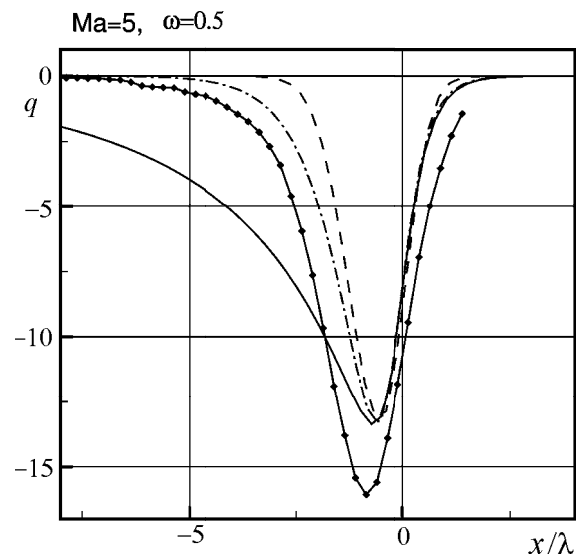


Рис. 4. Профили теплового потока

#### Литература

1. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. // ЖВМ и МФ. 1985. **25**, №10. С. 1526.
2. Шеретов Ю.В. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Изд-во Тверского гос. ун-та, 1997. С. 127.
3. Шеретов Ю.В. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Изд-во Тверского гос. ун-та, 1999. С. 184.
4. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. // ЖВМ и МФ. 2001. **41**, №2. С. 239.
5. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
6. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М: Янус, 1995.
7. Алексеев Б.В. // УФН. 2000. **170**, №6. С. 649.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
9. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

Поступила в редакцию  
14.02.01