

УДК 519.634

## КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

© 2005 г. Т. Г. Елизарова\*, М. Е. Соколова\*\*, Ю. В. Шеретов\*\*\*

(\* 125047 Москва, Миусская пл., 4а, Ин-т матем. моделирования РАН;

\*\* 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т;

\*\*\* 170000 Тверь, ул. Желябова 33, Тверской гос. ун-т)

e-mail: elizar@imamod.ru; msokolova@mail.ru; Yurii.Sheretov@tversu.ru

Поступила в редакцию 30.06.2004 г.

Переработанный вариант 30.09.2004 г.

Приведена система квазигазодинамических уравнений, и выписано уравнение баланса энтропии. Описаны способы численного решения системы уравнений для моделирования нестационарных сверхзвуковых и дозвуковых течений вязкого газа. Приведены примеры численных расчетов двумерных течений. Библ. 13. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** численное моделирование, вязкий газ, дозвуковые и сверхзвуковые течения.

### ВВЕДЕНИЕ

Впервые система квазигазодинамических (КГД) уравнений, расширяющая возможности классической модели Навье–Стокса для описания течений вязкого сжимаемого газа, была получена в [1] на основе известной кинетической модели. Течение при этом представлялось как совокупность процессов бесстолкновительного разлета атомов газа с последующей мгновенной релаксацией к локально-равновесному состоянию. Феноменологический вывод дифференциального варианта КГД-уравнений из интегральных законов сохранения для подвижного материального объема и исследование свойств КГД-системы приведены в [2]–[4]. Эти уравнения хорошо зарекомендовали себя при моделировании течений, в которых газодинамические параметры не сильно меняются во времени. Начиная с первых публикаций по указанной тематике, развивались численные методы решения КГД-уравнений, а также исследовались тесно связанные с ними кинетически-согласованные разностные схемы [5].

В данной работе КГД-уравнения выписаны в инвариантной форме, которая соответствует дифференциальному виду законов сохранения, приведено уравнение баланса энтропии. Изложен современный взгляд на способ численного решения этих уравнений для нестационарных сверхзвуковых и дозвуковых течений, приведены некоторые примеры расчета двумерных задач.

### 1. КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

КГД-система с учетом внешних сил может быть представлена в инвариантном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes u) + \nabla p = \rho_* \mathbf{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \mathbf{j}_m \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \mathbf{q} = (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{F}) + \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Замкнем ее уравнениями состояния идеального политропного газа:

$$p = \rho RT, \quad \varepsilon = c_v T, \quad s = c_v \ln \left( \frac{RT}{\rho^{(\gamma-1)}} \right) + \operatorname{const}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  – плотность среды,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – скорость,  $p = p(\mathbf{x}, t)$  – давление,  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t)$  – удельная внутренняя энергия,  $T = T(\mathbf{x}, t)$  – температура,  $s = s(\mathbf{x}, t)$  – удельная энтропия,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  – массовая плотность внешних сил,  $\rho_* = \rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$  – приближенное значение плотности в точке  $(\mathbf{x}, t + \tau)$ ,  $R$  – газовая постоянная,  $c_v = R/(\gamma - 1)$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Символы  $\otimes$  и  $\cdot$  используются для обозначения операций прямого тензорного и скалярного произведений соответственно. Величины  $\mathbf{j}_m = \mathbf{j}_m(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Pi = \Pi(\mathbf{x}, t)$  и  $q = q(\mathbf{x}, t)$ , интерпретируемые как вектор плотности потока массы, тензор вязких напряжений и вектор теплового потока соответственно, вычисляются по формулам

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (1.5)$$

$$\Pi = \Pi_{\text{NS}} + \tau \mathbf{u} \otimes [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}] + \tau I[(\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (1.6)$$

$$q = q_{\text{NS}} - \tau \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + p(\mathbf{u} \cdot \nabla)(1/\rho)], \quad (1.7)$$

где

$$\Pi_{\text{NS}} = \mu [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (1.8)$$

$$\mathbf{q}_{\text{NS}} = -\kappa \nabla T, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{F}]. \quad (1.10)$$

Функции  $\mu = \mu(T)$ ,  $\kappa = \kappa(T)$  и  $\tau = \tau(p, T)$  выберем в виде

$$\mu = \mu_1 \left( \frac{T}{T_1} \right)^\omega, \quad \kappa = \frac{c_p \mu}{\operatorname{Pr}}, \quad \tau = \frac{\mu}{p \operatorname{Sc}}, \quad (1.11)$$

где  $\mu_1$  – известное значение коэффициента динамической вязкости при температуре  $T_1$ ,  $\omega$  – заданный показатель степенной зависимости,  $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\operatorname{Pr}$  и  $\operatorname{Sc}$  – числа Прандтля и Шмидта.

Уравнения Навье–Стокса получаются из КГД-уравнений при  $\tau = 0$ .

В [2], [3] показано, что КГД-система (1.1)–(1.11) является диссипативной и для нее может быть выведено уравнение баланса энтропии. Для получения этого уравнения в [3] равенства (1.1)–(1.3) были представлены в недивергентном виде:

$$\rho D(1/\rho) = \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (1.12)$$

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = \rho_* \mathbf{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (1.13)$$

$$\rho D(\mathbf{u}^2/2 + \varepsilon) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla p + p \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{F} + \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}). \quad (1.14)$$

Здесь  $D = \partial/\partial t + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla$  – дифференциальный оператор. Используя правила тензорного анализа, на основе равенств (1.12)–(1.14) можно получить уравнение баланса энтропии в виде

$$\rho Ds = -\operatorname{div}(\mathbf{q}/T) + X, \quad (1.15)$$

где неотрицательное производство энтропии определяется по формуле

$$X = \kappa \left( \frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi_{\text{NS}} : \Pi_{\text{NS}})}{2\mu T} + \frac{p\tau}{\rho^2 T} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})]^2 + \frac{\tau}{\rho T} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}]^2 + \frac{\tau}{\rho \varepsilon T} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + p \operatorname{div} \mathbf{u}]^2, \quad (1.16)$$

в которой  $(\Pi_{\text{NS}} : \Pi_{\text{NS}}) = \sum_{i,j=1}^3 (\Pi_{\text{NS}})_{ij} (\Pi_{\text{NS}})_{ij}$  – двойное скалярное произведение двух одинаковых тензоров. Заметим, что в (1.16) члены, содержащие  $\tau$ , представляют собой квадраты левых частей классических уравнений Эйлера в стационарном случае с положительными коэффициентами. Используя закон сохранения массы (1.1), тождество (1.15) можно представить в дивергентном виде:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m s) = -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + X. \quad (1.17)$$

Предположим, что течение газа происходит в замкнутом сосуде  $V_0$  с не проводящей тепло стенкой  $\Sigma_0$ . Добавим к системе (1.1)–(1.11) начальные условия

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad \mathbf{x} \in V_0, \quad (1.18)$$

а также граничные условия

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.19)$$

Здесь  $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ ,  $T_0 = T_0(\mathbf{x}) > 0$  – заданные значения плотности, скорости и температуры в момент времени  $t = 0$ . Первое из условий (1.19) означает, что газ прилипает к стенкам сосуда, второе условие обеспечивает отсутствие потока массы через границу, третье влечет равенство нулю на  $\Sigma_0$  нормальной составляющей теплового потока. Интегрируя (1.17) и принимая во внимание (1.18), (1.19), приходим к неравенству для полной термодинамической энтропии

$$S(t) = \int_{V_0} (\rho s) d\mathbf{x}$$

$$dS(t)/dt \geq 0. \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует, что величина  $S(t)$  является неубывающей функцией времени. Аналогичный факт, как известно, имеет место и для системы Навье–Стокса.

На основе асимптотического анализа КГД-системы в приближении числа Кнудсена, стремящегося к нулю, в [2], [3] показано, что для стационарных течений добавочные члены, пропорциональные  $\tau$ , имеют порядок  $o(Kn^2)$ , т.е. в пределе малых чисел Кнудсена КГД-система (1.1)–(1.11) переходит в систему уравнений Навье–Стокса. Напомним, что число Кнудсена определяется как  $Kn = \lambda/L$  (где  $\lambda$  – длина свободного пробега в невозмущенном течении,  $L$  – характерный размер).

При стремлении числа  $Kn$  к единице, а также для быстропеременных течений влияние дополнительных диссипативных слагаемых может возрастать. В приближении пограничного слоя система КГД-уравнений, так же как и система уравнений Навье–Стокса, переходит в систему уравнений Прандтля.

Постановка условий прилипания и непротекания (первые два соотношения в (1.19)) приводит к тому, что присутствующая в КГД-уравнениях дополнительная диссипация отлична от нуля только в поле течения и исчезает на границах области. В частности, для КГД-уравнений поток тепла на стенку и недиагональные компоненты тензора вязких напряжений, определяющие силу трения на границе, совпадают с соответствующими величинами для уравнений Навье–Стокса.

## 2. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КГД-УРАВНЕНИЙ

Будем строить разностную аппроксимацию КГД-уравнений непосредственно на основе записи системы в виде законов сохранения (1.1)–(1.3). В отличие от развитых ранее методов, аппроксимации строятся в потоковой форме непосредственно для векторов плотности потока массы  $\mathbf{j}_m$ , теплового потока  $\mathbf{q}$  и тензора вязких напряжений  $\Pi$ , записанных в виде (1.5)–(1.10), что делает численный алгоритм компактным и экономичным. Такой подход позволяет независимо одно от другого варьировать значения коэффициентов вязкости, теплопроводности и релаксационного параметра в КГД-добавках (см. [6], [7]).

Для плоских двумерных течений система КГД-уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx} u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my} u_x)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx} u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my} u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx} H)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my} H)}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(\Pi_{xx} u_x + \Pi_{xy} u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\Pi_{yx} u_x + \Pi_{yy} u_y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u_x$  и  $u_y$  – проекции вектора скорости  $\mathbf{u}$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $E$  и  $H$  – полная энергия

единицы объема и полная удельная энтальпия, которые вычисляются по формулам

$$E = \rho \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{E + p}{\rho}.$$

Компоненты векторов плотности потока массы  $j_{mx}$  и  $j_{my}$  вычисляются следующим образом:

$$j_{mx} = \rho(u_x - w_x), \quad j_{my} = \rho(u_y - w_y), \quad (2.2)$$

где

$$w_x = \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad w_y = \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right].$$

Компоненты тензора вязких напряжений  $\Pi$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \Pi_{xx}^{\text{NS}} + u_x w_x^* + R^*, & \Pi_{xx}^{\text{NS}} &= 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{xy}^{\text{NS}} + u_x w_y^*, & \Pi_{xy}^{\text{NS}} = \Pi_{yx}^{\text{NS}} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\ \Pi_{yx} &= \Pi_{yx}^{\text{NS}} + u_y w_x^*, \\ \Pi_{yy} &= \Pi_{yy}^{\text{NS}} + u_y w_y^* + R^*, & \Pi_{yy}^{\text{NS}} &= 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а  $w_x^*$ ,  $w_y^*$ ,  $R^*$  и дивергенция вектора скорости  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  задаются формулами

$$\begin{aligned} w_x^* &= \tau \left( \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), & w_y^* &= \tau \left( \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ R^* &= \tau \left( u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right), & \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Компоненты вектора теплового потока  $q$  вычисляются так:

$$\begin{aligned} q_x &= q_x^{\text{NS}} - u_x R^q, & q_y &= q_y^{\text{NS}} - u_y R^q, \\ R^q &= \tau \rho \left[ \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_y}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + p u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + p u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где слагаемые Навье–Стокса  $q_x^{\text{NS}}$  и  $q_y^{\text{NS}}$  задаются формулами

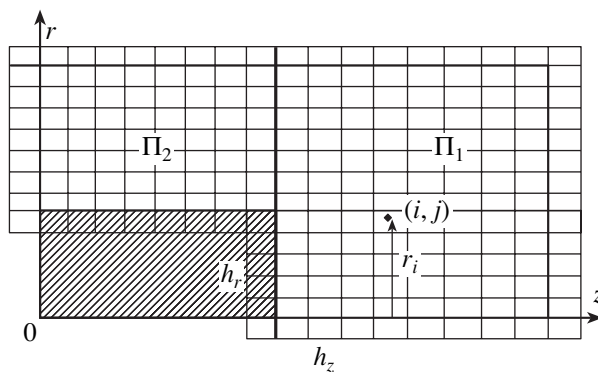
$$q_x^{\text{NS}} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y^{\text{NS}} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Система уравнений (2.1)–(2.5) дополняется начальными и краевыми условиями.

Для численного решения задачи в области расчета вводится разностная сетка по пространству и по времени. Компоненты скоростей, давление и плотность определяются в узлах сетки. Значения газодинамических величин  $\Psi = (\rho, u_x, u_y, p)$  в узлах с полуцелыми индексами и в центрах ячеек определяются как среднее арифметическое их значений в прилегающих узлах:

$$\begin{aligned} \Psi_{i\pm 1/2, j} &= 0.5(\Psi_{i\pm 1, j} + \Psi_{i, j}), & \Psi_{i, j\pm 1/2} &= 0.5(\Psi_{i, j\pm 1} + \Psi_{i, j}), \\ \Psi_{i+1/2, j\pm 1/2} &= 0.25(\Psi_{i+1, j\pm 1} + \Psi_{i, j\pm 1} + \Psi_{i+1, j} + \Psi_{i, j}), \\ \Psi_{i-1/2, j\pm 1/2} &= 0.25(\Psi_{i-1, j\pm 1} + \Psi_{i, j\pm 1} + \Psi_{i-1, j} + \Psi_{i, j}). \end{aligned}$$

Для остальных функций  $f = f(\rho, u_x, u_y, p)$  полагаем  $f = f(\rho_{ij}, (u_x)_{ij}, (u_y)_{ij}, p_{ij})$ . Аналогичные соотношения имеют место и для узлов с полуцелыми индексами.



Фиг. 1.

Для решения начально-краевой задачи (2.1) используется явная по времени разностная схема. Пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности, производные по времени – разностями вперед с первым порядком.

Аппроксимация первого уравнения системы (2.1) имеет вид

$$\frac{\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{h_x} [(j_{mx})_{i+1/2, j} - (j_{mx})_{i-1/2, j}] + \frac{1}{h_y} [(j_{my})_{i, j+1/2} - (j_{my})_{i, j-1/2}] = 0,$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени, а  $\hat{\rho}_{ij}$  вычисляется на следующем временном слое. Остальные уравнения системы (2.1) аппроксимируются аналогично.

Для единообразного вычисления газодинамических величин во всех внутренних точках, включая приграничные точки, вводится система фиктивных ячеек, примыкающих к каждой из границ. Если расчетная область представляет собой систему прямоугольных подобластей, то для аккуратной аппроксимации уравнений вблизи угловых точек область расчета разбивается на соответствующие прямоугольные подобласти, вдоль границ которых вводятся фиктивные ячейки (см. [6]). Алгоритм нахождения плотности, компонент скорости и давления состоит из двух этапов: первый – заполнение фиктивных ячеек на основе граничных условий, второй – вычисление параметров течения на следующем временном слое во внутренних точках области. Для численного решения начально-краевой задачи используется явная по времени разностная схема. На фиг. 1 приведен пример разбиения расчетной области и расположение фиктивных ячеек для случая осесимметричного течения.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для расчета сверхзвуковых течений приводим КГД-уравнения (2.1)–(2.5) к безразмерному виду. В качестве основных размерных параметров выберем плотность набегающего потока  $\rho_\infty$ , скорость звука в невозмущенном течении  $c_\infty$  и характерный размер  $L$ . Соотношения между размерными и безразмерными величинами (знак тильда относится к безразмерным параметрам) имеют вид

$$\rho = \tilde{\rho} \rho_\infty, \quad u = \tilde{u} c_\infty, \quad p = \tilde{p} \rho_\infty c_\infty^2, \quad x = \tilde{x} L, \quad t = \tilde{t} \frac{L}{c_\infty}, \quad T = \tilde{T} \frac{c_\infty^2}{\gamma R}. \quad (3.1)$$

Числа Маха и Рейнольдса определим так:

$$M = \frac{u_\infty}{c_\infty}, \quad Re = \frac{u_\infty \rho_\infty L}{\mu_0},$$

где  $c_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty}$  – скорость звука при температуре  $T_\infty$ .

После обезразмеривания система (2.1)–(2.5) не меняет своего вида. Уравнения связи принимают вид  $p = \rho T / \gamma$  и  $c = \sqrt{T}$ .

Для обеспечения устойчивости численного решения в релаксационный параметр  $\tau$  вводится добавка, пропорциональная шагу пространственной сетки. При этом релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности вычисляются так:

$$\tau = \frac{M}{\text{ReSc}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{p}{\rho} \right)^\omega + \alpha \frac{h_{xy}}{c}, \quad \mu = p \text{Sc} \tau, \quad \kappa = \frac{\tau p \text{Sc}}{\text{Pr}(\gamma - 1)}, \quad (3.2)$$

где  $h_{xy} = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ ,  $h_x, h_y$  – шаги разностной сетки по пространству в направлениях  $x, y$ ,  $\alpha$  – численный коэффициент порядка единицы.

Обратим внимание, что в данном численном алгоритме коэффициенты вязкости и теплопроводности вычисляются при помощи параметра  $\tau$ . Тем самым в алгоритме расчета сверхзвуковых течений стабилизирующая сеточная добавка  $\alpha h_{xy}/c$  включена в коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Исходя из формул (3.2), можно выписать условие, при котором сеточная добавка не превосходит естественную вязкость. Пренебрегая постоянными порядка единицы, получаем условие, когда сеточную добавку можно считать малой:

$$\alpha \frac{h_{xy}}{c} < \frac{M}{\text{Re}} \frac{1}{\rho} \left( \frac{p}{\rho} \right)^\omega.$$

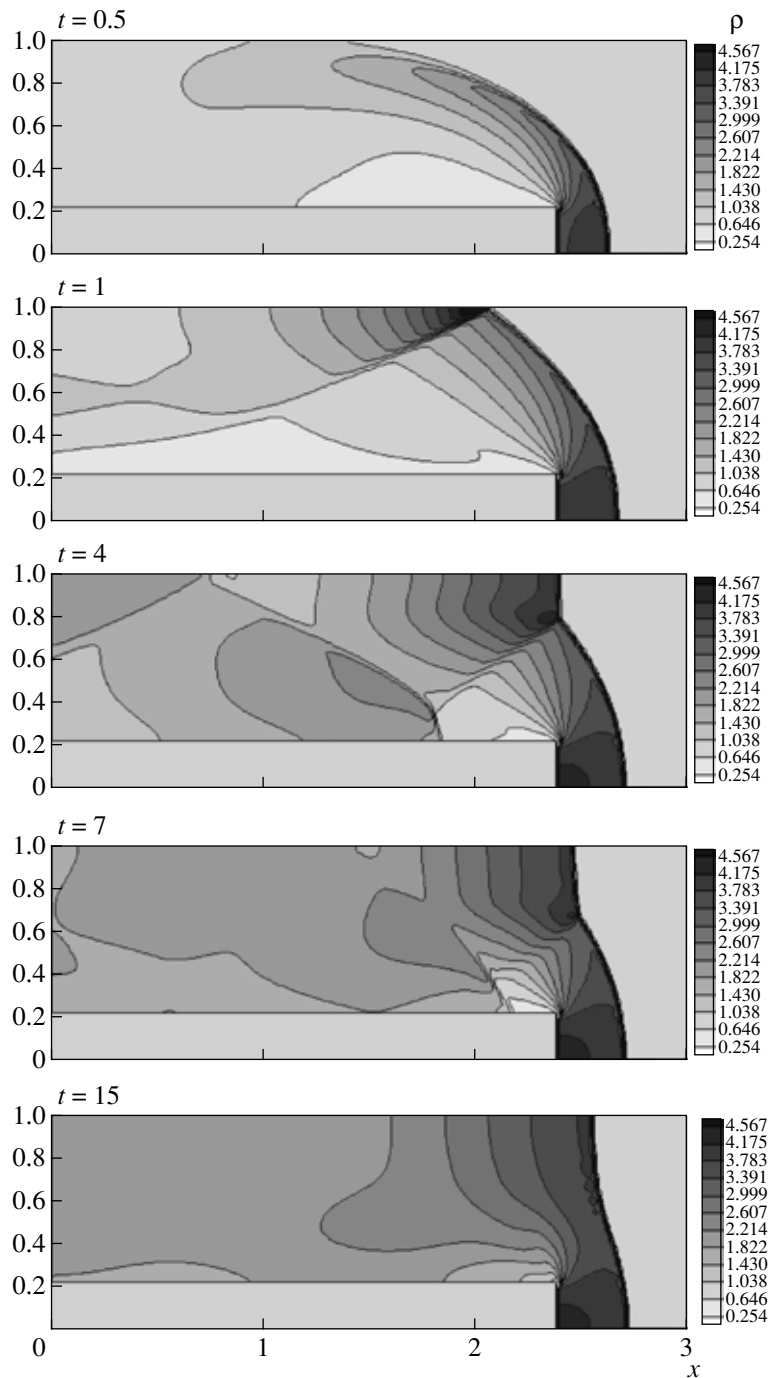
При  $\omega = 1/2$  данное условие упрощается и принимает вид  $\alpha h_{xy} < M/(\rho \text{Re})$ .

Приведенный алгоритм тестировался на задаче обтекания цилиндрического торца однородным сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа под нулевым углом атаки (см. [7]). Схема расчетной области для этой задачи приведена на фиг. 1. Характерным линейным размером в этой задаче является радиус цилиндра. Задача решается на основе аналога системы уравнений (2.1)–(2.5), выписанного для цилиндрической системы координат (см. [6], [7]). Граничные условия на входной (правой) границе соответствуют условиям набегающего потока  $\rho_\infty = 1$ ,  $(u_z)_\infty = -M$ ,  $(u_r)_\infty = 0$ ,  $p_\infty = 1/\gamma$ . На оси симметрии ставятся “условия симметрии”, на торце цилиндра и боковой поверхности – условия (1.19). На левой выходной и на свободной верхней границе ставятся “мягкие” граничные условия – равенство нулю нормальных производных плотности, давления и компонент скорости. Начальными условиями являются параметры невозмущенного потока. Рассматривается течение вязкого одноатомного газа твердых шаров с параметрами  $\gamma = 5/3$ ,  $\text{Pr} = 2/3$ ,  $\text{Sc} = 0.77$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\text{Re} = 10^4$ .

Расчеты проведены на равномерных пространственных сетках с шагами по пространству  $h_r = h_z = 0.05$  и  $0.025$  для значений параметра  $0.2 < \alpha < 1$  и  $M = 1.5, 2, 3, 5, 50$ . Стационарное решение находится методом установления. Шаг по времени  $\Delta t$  во всех расчетах выбирался в пределах от  $10^{-3}$  до  $10^{-6}$ . Шаг по времени уменьшался с ростом числа Маха и уменьшением шага пространственной сетки. Точность решения оценивалась на основе рассчитанных параметров торможения и положения ударной волны перед торцом цилиндра. Во всем исследованном диапазоне параметров  $\alpha$  точность решения и скорость сходимости численного алгоритма слабо зависят от величины  $\alpha$ . Оптимальное значение параметра  $\alpha = 0.5$ . Метод демонстрирует высокую точность расчета скачков уплотнения и отсутствие осцилляций решения при больших числах Маха (см. [7]).

На основе системы уравнений (2.1)–(2.5) проведен расчет сверхзвукового течения в канале со ступенькой. Сложная конфигурация ударных волн, формирующихся с течением времени в канале, служит известным тестом для оценки методов решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса (см. [8], [9]).

Задача решается в следующей постановке: длина канала 3, ширина 1, высота ступеньки, расположенной на расстоянии 0.6 от начала канала, равна 0.2. Рассматривается невязкий нетеплопроводный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ . На входной (правой) границе задается однородный поток с  $M = 3$ , на выходной (левой) ставятся “мягкие” граничные условия. На стенках канала и ступеньки задаются “отражающие” граничные условия. При вычислении релаксационного параметра  $\tau$  коэффициент  $\alpha = 0.3$ . На фиг. 2 приведен процесс установления течения (распределенный поля плотности) на сетке  $240 \times 80$ . Картина течения на момент времени  $t = 4$  соответствует данным, полученным с использованием разностных схем высокого порядка точности (см. [8], [9]). На фиг. 3 приведены распределения плотности в канале на момент времени  $t = 4$ , демонстрирующие сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки. Шаги сетки выбирались равными  $h_x = h_y = 0.025, 0.0125$  и  $0.00625$ . Соответственно, шаги по времени  $\Delta t$  в безразмерных единицах составляли  $10^{-3}, 5 \times 10^{-4}$  и  $10^{-4}$ .



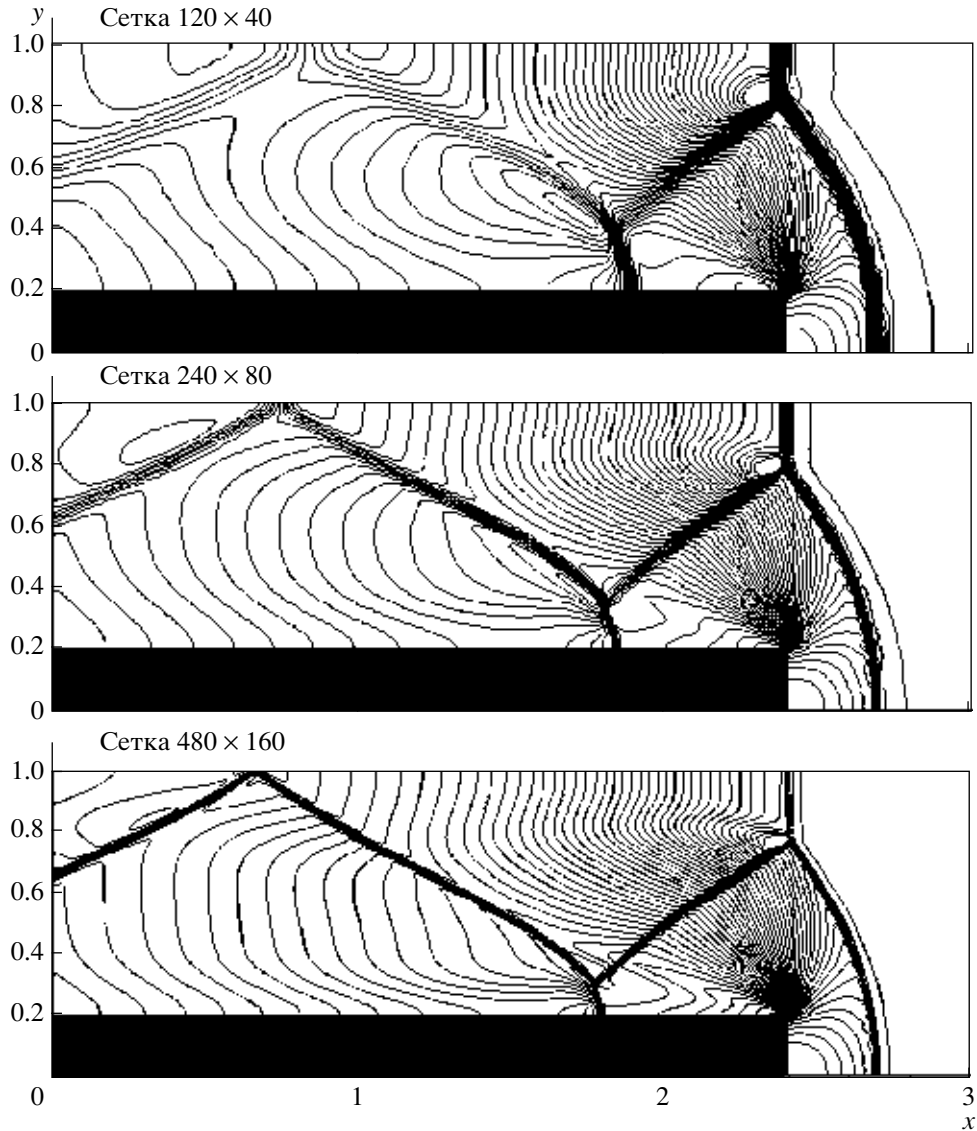
Фиг. 2.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

При расчете дозвуковых течений, в отличие от (3.1), в качестве единицы скорости будем выбирать скорость набегающего потока  $u_\infty$ . При этом в безразмерном виде коэффициенты вязкости, теплопроводности и релаксационный параметр  $\tau$  вычисляются по формулам

$$\mu = \frac{1}{\text{Re}} (M^2 T)^\omega, \quad \tau = \frac{\mu}{\rho S c}, \quad \kappa = \frac{\mu}{\text{Pr}(\gamma - 1)}.$$

В отличие от алгоритма расчета сверхзвуковых течений, при расчете дозвуковых течений стабилизирующую добавку, пропорциональную шагу пространственной сетки  $\alpha h_{xy}/c$ , достаточно



Фиг. 3.

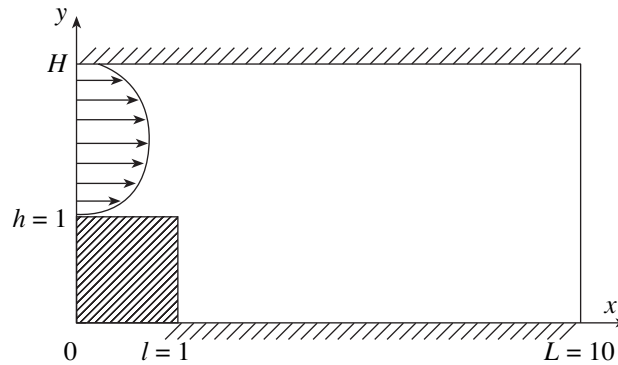
ввести только в релаксационный параметр в виде

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{p\text{Sc}} (M^2 T)^\omega + \alpha h_{xy} M.$$

Сеточную добавку можно считать малой по сравнению с истинной вязкостью, если  $\alpha h_{xy} < M/\text{Re}$ . Сеточная добавка не входит в формулы для вычисления силы трения и потока тепла на стенку.

В расчетах дозвуковых течений возникает проблема постановки и численной реализации граничных условий на свободных границах расчетной области. Такие “неотражающие” граничные условия не должны искажать поле течения внутри расчетной области, обеспечивая поглощение или пропускание проходящих на границу возмущений, которые могут возникать внутри области расчета. В качестве таких условий, как правило, используются граничные условия, основанные на инвариантах Римана для соответствующих уравнений Эйлера, – так называемые характеристические граничные условия [10], [11]. Эти условия применяются в расчетах как вязких, так и невязких течений. Предложены многочисленные варианты постановки и численной реализации условий такого типа. Тем не менее их использование связано с серьезными трудностями, которые обусловлены как многочисленными вариантами их построения в дифференциальном и раз-





Фиг. 4.

ностном виде, так и недостаточным математическим обоснованием этих условий для течений вязкого газа.

В рамках КГД-алгоритма для постановки условий на свободных дозвуковых границах удастся применить простые и естественные граничные условия, аналогичные условиям для течений вязкой несжимаемой жидкости. Опишем постановку таких условий на примере задачи о течении в канале с внезапным расширением (см. фиг. 4).

Предположим, что на входе в канал течение представляет собой параболу Пуазейля:

$$u_x(y) = -\frac{\text{Re} \partial p}{2 \partial x} (H - y)(h - y), \quad p = \left(1 - \frac{x}{L}\right) p_1 + \frac{x}{L} p_2.$$

Из условия, что средняя скорость на входе  $u_\infty = 1$ , вычислим градиент давления на входе в канал. Для определенности положим  $H/h = 2$ . Тогда

$$u_x(y) = -6(2 - y)(1 - y), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12}{\text{Re}}. \tag{4.1}$$

Граничные условия на входе (4.1) дополним условиями для плотности  $\rho = 1$  и вертикальной скорости  $u_y = 0$ .

На выходной границе задаются мягкие граничные условия для плотности и компонент скорости, а давление поддерживается постоянным:

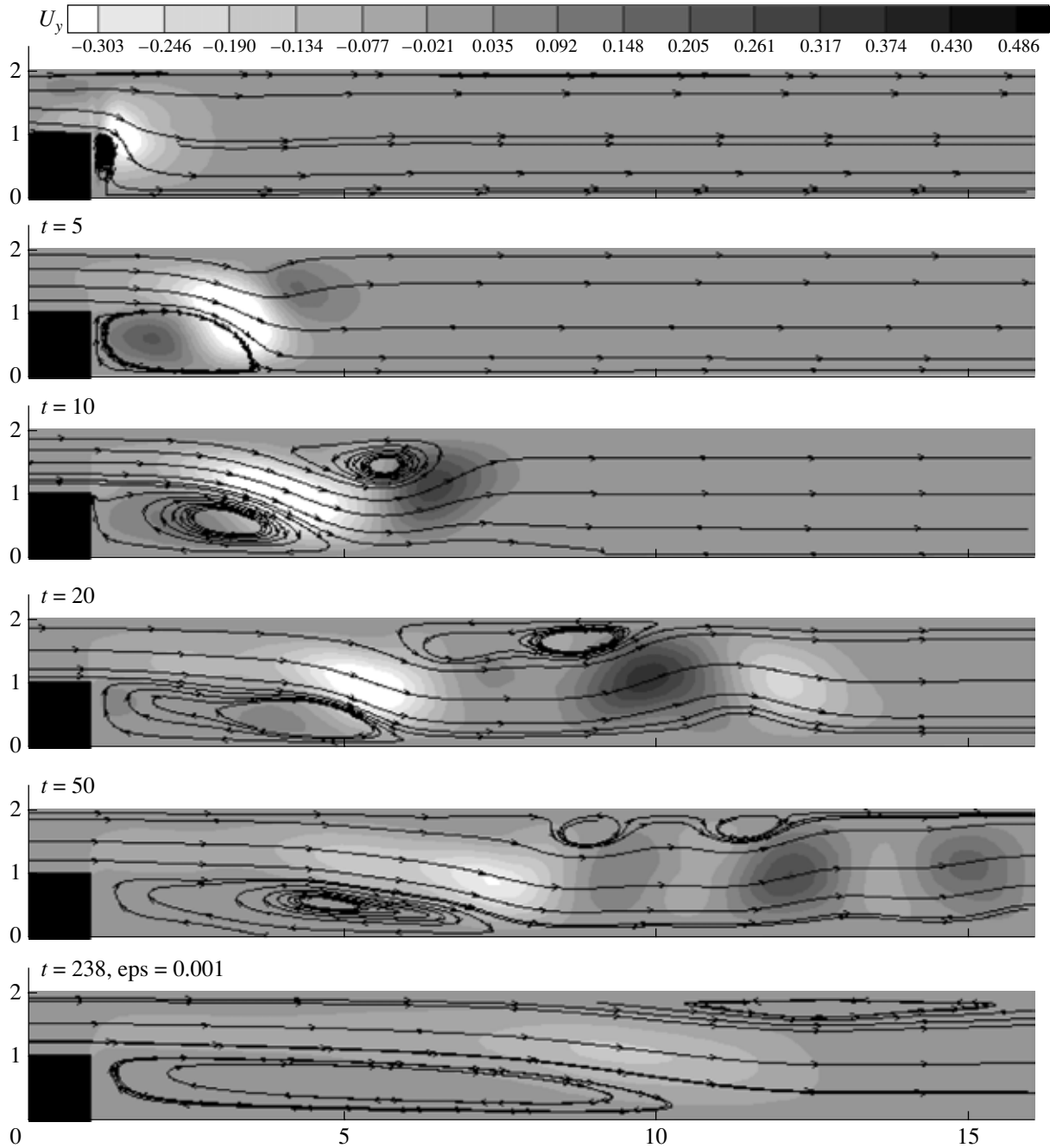
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad p = \frac{1}{\gamma M^2}.$$

На твердых стенках канала будем задавать условия прилипания и непротекания совместно с условиями адиабатичности для температуры (1.19).

Описанный алгоритм использован в расчетах течений вязкого сжимаемого газа (воздуха; параметры  $\gamma = 1.4$ ,  $\text{Pr} = 0.737$ ,  $\text{Sc} = 0.746$ ,  $\omega = 0.74$ ) в каналах с внезапным расширением и сужением для чисел Рейнольдса 100, 200, 300 и 400 при  $M$  от 0.01 до 0.5. Использовались равномерные пространственные сетки с шагами  $h_x = h_y = 0.1$  и  $0.05$ . Шаги по времени  $\Delta t$  в безразмерных единицах выбирались в интервале от  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$ .

Для рассматриваемых течений градиенты плотности пропорциональны  $1/M^2$ , что позволяет оценивать точность полученного решения путем сопоставления его с расчетами, выполненными в приближении вязкой несжимаемой жидкости (см. [12], [13]).

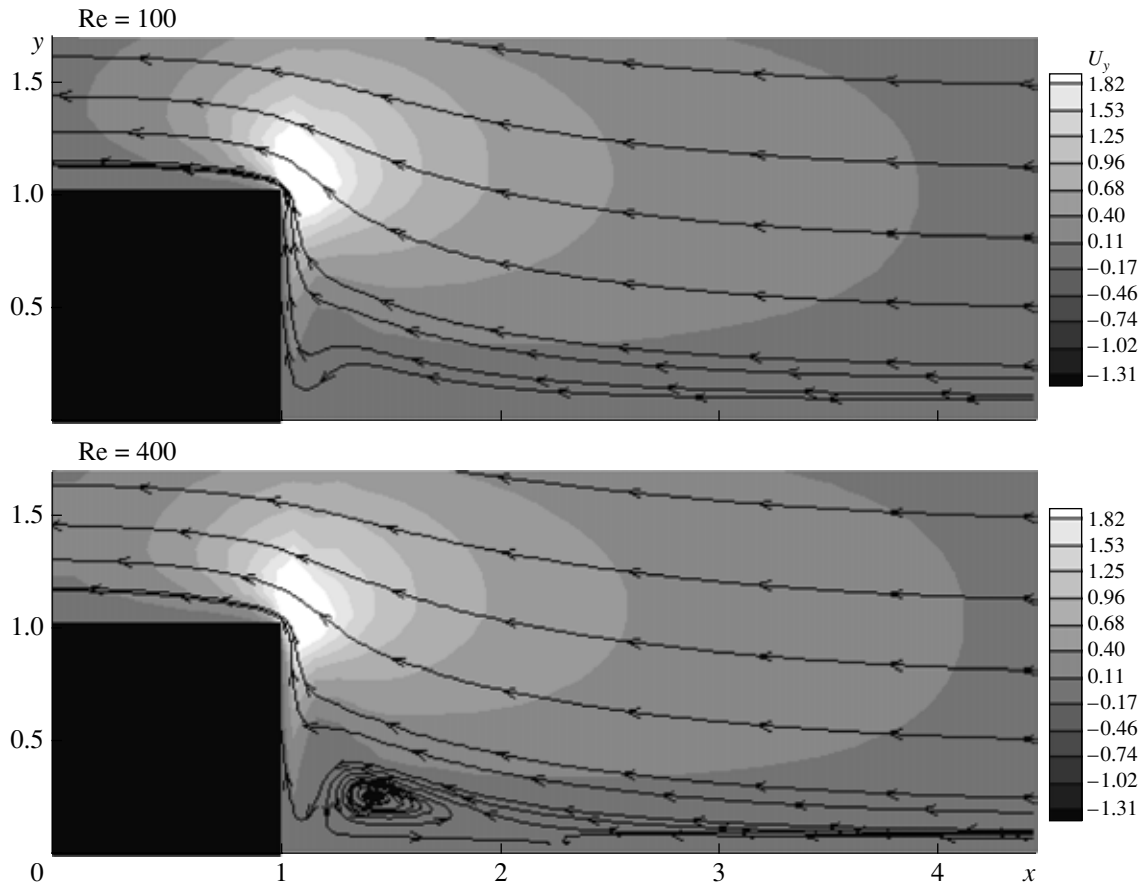
В задаче о течении за обратным уступом получено, что длина отрывной зоны совпадает с результатами расчетов и экспериментов для вязкой несжимаемой жидкости (см. [12]), причем точность расчетов по КГД-модели практически не зависит от величины параметра  $\alpha$ , когда этот параметр изменяется в диапазоне  $0.5 < \alpha < 2$ . Выбор параметра  $\alpha$  вне указанного диапазона требует уменьшения шага интегрирования по времени и увеличения числа шагов до сходимости. В исследованном диапазоне чисел Маха длина отрывной зоны практически не зависит от числа Маха. Уменьшение числа Маха приводит к росту числа шагов и времени счета до сходимости. На фиг. 5 изображен процесс установления течения для варианта  $\text{Re} = 300$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $M = 0.1$ , сетка  $160 \times 120$ ).



Фиг. 5.

На рисунках дано тональное распределение вертикальной составляющей скорости  $u_y$  и приведены линии тока. Видно, что возмущения свободно пересекают выходную границу области.

Расчеты течения в канале с внезапным сужением сопоставлены с расчетами из [13], выполненными в рамках уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в переменных “функция тока”, “вихрь скорости”. На фиг. 6 приведено распределение вертикальной составляющей скорости  $u_y$  и линий тока для двух вариантов установившегося течения:  $Re = 100$  и  $400$  ( $M = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ , сетка  $50 \times 20$ ). В первом случае отрывное течение не образуется ни перед уступом, ни над его верхней стенкой. При числе Рейнольдса  $Re = 400$  образуется вихрь перед уступом. Образование отрывной зоны с ростом числа Рейнольдса и ее размер хорошо согласуются с данными из [13].



Фиг. 6.

В заключение отметим, что простота реализации и хорошая точность построенных численных алгоритмов для расчета нестационарных сверхзвуковых и дозвуковых течений газа, по мнению авторов, обеспечиваются использованием регуляризаторов специального вида, присутствующих в КГД-уравнениях.

Авторы благодарны А.Г. Свешникову за внимание и поддержку проводимых исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н.* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Матем. моделирование: процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 261–278.
2. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
3. *Шеретов Ю.В.* Некоторые свойства квазигазодинамических уравнений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000. С. 134–149.
4. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 2. С. 239–255.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. М.: МГУ, 1999.
6. *Шеретов Ю.В.* О разностных аппроксимациях квазигазодинамических уравнений для осесимметричных течений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2001. С. 191–207.
7. *Елизарова Т.Г., Соколова М.Е.* Численный алгоритм расчета сверхзвуковых течений, основанный на квазигазодинамических уравнениях // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2004. № 1. С. 10–15.

8. *Woodward P., Collela P.J.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shock // *J. Comput. Phys.* 1984. № 5. P. 115–173.
9. *Граур И.А.* Метод квазигазодинамического расщепления для решения уравнений Эйлера // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2001. Т. 41. № 10. С. 1583–1596.
10. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1980.
11. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003.
12. *Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.* 1983. № 127. P. 473–496.
13. *Mei R.V., Plotkin A.* Navier-Stokes solutions for some laminar incompressible flows with separation in forward step geometries: AIAA Paper. 1986. № 8. P. 110.