

Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений невязкого газа

Т. Г. Елизарова, Е.В.Шильников

125047 Москва, Миусская пл. 4а, ИММ РАН.

e-mail telizar@mail.ru; shiva@imamod.ru

Поступила в редакцию 15.08.2008.

Переработанный вариант 16.09.2008

Представлено решение десяти известных одномерных тестовых задач, отражающих характерные особенности нестационарных течений невязкого газа. Показано, что все тесты успешно решаются с помощью единого численного алгоритма, основанного на квазигазодинамической системе уравнений. Во всех случаях численное решение сходится к автомодельному решению при сгущении пространственной сетки.

Библ. 15, Фиг. - 27.

Ключевые слова: квазигазодинамический алгоритм, уравнения Эйлера, одномерные течения.

Введение

Расчет нестационарных течений сжимаемого газа в одномерном по пространству приближении является наглядным способом оценки возможностей численных алгоритмов. В настоящее время имеется большое число примеров решения многомерных задач, которые также используются для сопоставления численных методов между собой. Однако в таких расчетах, как правило, точность решения определяется не только самим численным алгоритмом, но и структурой пространственной сетки, способом постановки граничных условий и прочими обстоятельствами, что затрудняет сопоставление самих численных алгоритмов. Кроме того, одномерные течения невязкого газа детально исследованы теоретически, а для течений типа распада разрыва имеются автомодельные решения уравнений Эйлера [1], [2], которые служат надежным эталоном проверки точности и сходимости

численных решений.

Представительная система тестов собрана, например, в [3] и [4], где десять примеров одномерных нестационарных течений невязкого газа рассчитываются на основе десяти численных алгоритмов. Эти алгоритмы достаточно полно представляют возможности конечно-разностного подхода к решению уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных.

В данной работе на этих же тестах проверяются возможности численного алгоритма, основанного на квазигазодинамической (КГД) системе уравнений, см., например, [5], [6], [7]. КГД алгоритм и родственные ему кинетически-согласованные разностные схемы [8] успешно использовались для численного моделирования широкого круга течений вязкого сжимаемого газа. С их помощью рассчитывались двумерные и трехмерные нестационарные течения, но при этом тестовым расчетам одномерных задач уделялось недостаточное внимание. Настоящая работа восполняет этот пробел и демонстрирует применимость КГД алгоритма для сквозного расчета разнообразных по своей природе нестационарных одномерных задач.

1. Система квазигазодинамических уравнений и численный алгоритм

Квазигазодинамические (КГД) уравнения для одномерного плоского течения в общепринятых обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial j_m H}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \Pi u}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь E и H — полная энергия единицы объема и полная удельная энтальпия, которые вычисляются по формулам: $E = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$ и $H = (E + p)/\rho$. Вектор плотности потока массы вычисляется как

$$j_m = \rho(u - w),$$

где

$$w = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p).$$

Компонента тензора вязких напряжений, входящая в систему уравнений (1)–(3), определяется как

$$\Pi = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + u \tau \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Вектор теплового потока q равен

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \tau \rho u \left[\frac{u}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + pu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right],$$

где $p = \rho RT$, μ - коэффициент динамической вязкости, $\kappa = \mu \gamma R / ((\gamma - 1) Pr)$ - коэффициент теплопроводности, γ - показатель адиабаты, Pr - число Прандтля, $\tau = \mu / (p Sc)$ - релаксационный параметр, имеющий размерность времени, Sc - число Шмидта.

Для удобства численного решения система уравнений (1)–(3) приводится к безразмерному виду с использованием базовых значений плотности ρ_0 , скорости звука $c_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ и длины L . Обезразмеривание не изменяет вид уравнений.

Введем равномерную сетку по координате x с шагом h , и сетку по времени с шагом Δt . Значения всех газодинамических величин — скорости, плотности, давления будем определять в узлах сетки. Значения потоков определяются в полуцелых узлах. Для решения задачи (1)–(3) используем явную по времени разностную схему следующего вида:

$$\widehat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} - j_{mi-1/2}), \quad (4)$$

$$\widehat{\rho}_i u_i = \rho_i u_i + \frac{\Delta t}{h} [(\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}) - (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) - (j_{mi+1/2} u_{i+1/2} - j_{mi-1/2} u_{i-1/2})], \quad (5)$$

$$\hat{E}_i = E_i + \frac{\Delta t}{h} \left[\left(\Pi_{i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2} u_{i-1/2} \right) - \left(q_{i+1/2} - q_{i-1/2} \right) - \left(\frac{j_{mi+1/2}}{\rho_{i+1/2}} (E_{i+1/2} + p_{i+1/2}) - \frac{j_{mi-1/2}}{\rho_{i-1/2}} (E_{i-1/2} + p_{i-1/2}) \right) \right], \quad p_i = (\gamma - 1) \left(E_i - \frac{\rho_i u_i^2}{2} \right). \quad (6)$$

Дискретный аналог потока массы j_m имеет вид

$$j_{mi+1/2} = \rho_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (7)$$

где добавка к скорости вычисляется как

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{h} (\rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i). \quad (8)$$

Дискретные выражения для Π и q выписываются аналогично. Порядок точности разностной схемы (4) – (8) составляет $O(h^2 + \Delta t)$.

При численном решении уравнений Эйлера на основе системы (1)–(3) все диссипативные слагаемые, то есть слагаемые с коэффициентами μ , κ и τ , рассматриваются как искусственные регуляризаторы. При этом релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности связаны между собой и в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c}, \quad \mu = \tau \cdot p \cdot Sc, \quad \kappa = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (9)$$

где α – численный коэффициент, который, как правило, выбирался в пределах 0.2 – 0.7. В большинстве представленных далее расчетов полагаем $Pr=1$ и $Sc=1$.

Схема (4) – (9) формально имеет порядок $O(\alpha h + \Delta t)$. Приведенные далее расчеты подтверждают, что уменьшение коэффициента α в определенных пределах эквивалентно сгущению пространственной сетки в α раз.

Выписанная разностная схема (4) – (9) обладает условием устойчивости Куранта. Шаг по времени выбирается из соотношения

$$\Delta t = \beta \min \left(\frac{h}{|u_i| + c_i} \right), \quad (10)$$

где β – численный коэффициент, который в большинстве расчетов составляет 0.1 – 0.4.

2. Задачи Римана о распаде разрывов

В этом разделе рассмотрены задачи о распаде разрывов, собранные в [3] и [4]. Эти задачи всесторонне отражают характерные и сложные для численного моделирования особенности нестационарных газодинамических течений. Начальные данные к задачам о распаде разрывов приведены в Таблице 1 в соответствии с обозначениями, принятыми в [3] и [4]. А именно, значения газодинамических величин слева от разрыва обозначены индексом L , справа - индексом R . Момент времени, для которого построены графики, указан в таблице 1 и обозначен как t_{fin} .

Граничные условия совпадают с соответствующими начальными условиями на концах расчетной области. Во всех вариантах расчетов $\gamma = 1.4$, за исключением задачи Ноха (3), для которой $\gamma = 5/3$. Длина области расчета равна 1, разрыв расположен в точке 0.

Тест	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	t_{fin}
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
3	1	1	10^{-6}	1	-1	10^{-6}	1
3а	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99924	-6.19633	46.095	0.035
5	1.4	0	1	1	0	1	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	2
7	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544874	0.0039

Таблица 1: Начальные условия для задач Римана

Задачи 1,2,4,5 и 6 впервые были предложены и численно решены в [9]. В [10] задача 2 решалась на основе КГД алгоритма, представленного в виде схемы расщепления потока. Задача Ноха была впервые предложена и численно решена в [11].

Тест 1. Данная задача представляет собой один из вариантов зада-

чи Сода. В образующемся течении имеются все характерные особенности, присущие сверхзвуковым течениям - звуковые точки на границах волны разрежения, контактный разрыв и ударная волна.

В рамках КГД алгоритма устойчивое решение этой задачи обеспечивается выбором коэффициентов $0.2 \leq \alpha \leq 0.5$ и $\beta = 0.4$ в формулах (9) и (10), соответственно. Уменьшение коэффициента α при расчете параметра регуляризации (9) приводит к уточнению численного решения. На Фиг. 1 показаны распределения плотности, вычисленные для пространственной сетки с шагом $h = 0.0025$. Сплошная линия – автомодельное решение. Здесь, также как и в последующих расчетах, уменьшение коэффициента α в два раза практически эквивалентно уменьшению шага пространственной сетки в два раза. Однако выбор $\alpha < 0.2$ приводит к возникновению вычислительной неустойчивости, которая может быть устранена путем уменьшения шага по времени - уменьшения коэффициента β . Сходимость численного решения к автомодельному решению задачи (сплошная линия) при сгущении пространственной сетки для $\alpha = 0.2$ демонстрирует Фиг.2.

Тест 2. Течение здесь представляет собой две волны разрежения, разбегающиеся от центра области. Сложность численного решения этой задачи обусловлена тем, что в центре между разбегающимися потоками плотность газа и его давление очень малы, но в то же время внутренняя энергия $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$ к нулю не стремится. Представляется, что никакая разностная схема в переменных Эйлера не описывает поведение внутренней энергии в этой задаче с высокой точностью, см., например, [3] и [4].

Во всех расчетах этой задачи коэффициент $\beta=0.1$. Увеличение шага по времени приводило к численной неустойчивости. Зависимость плотности и внутренней энергии газа от шага сетки и параметра регуляризации α приведены на Фиг. 3 и 4. Линия 6 соответствует автомодельному решению. Где не оговорено специально, $\alpha=0.5$. Уменьшение параметра регуляризации, также как и уменьшение шага сетки, приводит к уточнению численного решения и его приближению к автомодельному решению. Это особенно

видно на графиках внутренней энергии (Рис.4). Результаты расчетов демонстрируют быструю сходимость распределения скорости по сетке.

Тест 3. Задача Ноха. Рассматриваемое в этой задаче течение представляет собой столкновение двух гиперзвуковых потоков холодного плотного газа, которое приводит к образованию двух расходящихся "бесконечно сильных" ударных волн, между которыми остается неподвижный газ с постоянными плотностью и давлением. Действительно, согласно начальным условиям (Таблица 1), скорость звука на невозмущенном фоне составляет $c = \sqrt{\gamma p_R / \rho_R} = 0.0013$. Скорость распространения волн равна 1, то есть число Маха $Ma = u_L / c = 775$. Известно, что в земных условиях максимально достижимое число Маха составляет порядка 30.

Расчеты этой задачи проводились при $\alpha = 0.5$ и $\beta = 0.001$. На первых же шагах расчета в центре расчетной области образуется провал плотности и скачок температуры и внутренней энергии (Фиг. 5, 6, 7, фрагмент). Во всей области течения, за исключением фронтов ударных волн, скорость и градиент давления тождественно равны нулю, $u = 0$, $dp/dx = 0$. Поэтому регуляризирующие добавки, пропорциональные τ , обращаются в ноль и не разглаживают образовавшиеся возмущения плотности и температуры. Единственный механизм, позволяющий сгладить численные возмущения - это теплопроводность. Поэтому увеличение теплопроводности - то есть уменьшение числа Прандтля - позволяет получить в этой задаче хорошее численное решение. Зависимость решения от числа Прандтля для $Pr = 1$, 0.01 и 0.001 показана на Фиг.5, 6, 7 и 8 (фрагменты). На последнем рисунке видно, что увеличение теплопроводности практически не влияет на форму профиля ударной волны.

Фиг.9 и 10 показывают быструю сходимость распределений плотности и скорости по сетке для $Pr = 0.001$. Также быстро сходятся к автомодельному решению распределения температуры и давления. (Автомодельное решение на данных рисунках не приведено).

Таким образом, увеличение искусственной теплопроводности позволяет

в рамках КГД модели получить достаточно точное решение задачи Нюха. Отметим, что ряд рассмотренных в [3] и [4] алгоритмов приводит к нефизическим осцилляциям и нарушению симметрии в профиле плотности. Заметим, что здесь, так же как и в других рассмотренных примерах, качественное численное решение в рамках КГД алгоритма получается на достаточно подробных сетках. Однако вычислительные затраты, связанные с подробностью сетки, компенсируются простотой и вычислительной эффективностью этого алгоритма.

Тест 3а. В эта задаче рассчитывается газодинамическое течение типа сжатия газа в термоядерной мишени. Перепад давления p_L/p_R составляет 10^5 , что соответствует перепаду температур того же порядка.

Параметр регуляризации для этой задачи вычислялся при $\alpha=0.7$. Меньшие значения α приводили к неустойчивости решения на контактном разрыве. Число Куранта $\beta=0.01$ для всех вариантов расчета. Увеличение искусственной теплопроводности ($Pr=0.1$) позволило улучшить численное решение. Зависимость плотности от числа Прандтля показана на Фиг. 11, $h=0.0032$. Здесь линия 4 - автомодельное решение. Сходимость численного решения по сетке видна на Фиг. 12, 13, 14. На последних двух рисунках приведены фрагменты распределений внутренней энергии и скорости течения газа. Видно очень хорошее разрешение фронта сильной ударной волны ($x \sim 0.005$). На указанных рисунках автомодельное решение показано сплошной линией.

Тест 4. Здесь рассматривается течение газа в виде двух расходящихся по газу ударных волн, между которыми располагается движущийся контактный разрыв. Для этой задачи характерно малое время протекания рассчитываемого процесса, и здесь численное решение задачи практически не зависит от величины искусственной теплопроводности (числа Прандтля).

Задача решалась при значениях определяющих параметров $\alpha=0.4$, $\beta=0.1$. Сходимость численного решения по сетке к автомодельным распределениям плотности и внутренней энергии (сплошная линия) показана на Фиг. 15

и 16.

Тест 5. Течение в этой задаче представляет собой неподвижный контактный разрыв. Задача решалась при $\alpha=0.4$ и $\beta=0.1$. Фиг. 17 демонстрирует влияние коэффициентов вязкости и теплопроводности на численное решение задачи. Подчеркнем, что коэффициенты вязкости и теплопроводности здесь $\sim h$, и соответствующие слагаемые рассматриваются как численные регуляризаторы. Величины коэффициентов вязкости и теплопроводности определяется коэффициентом Sc (9). При отключении вязкости и теплопроводности ($Sc=0$), КГД алгоритм для этой задачи является точным в том смысле, что ширина контактного разрыва составляет один шаг сетки. Этот факт демонстрирует роль КГД диссипации - КГД диссипация стабилизирует неподвижный контактный разрыв, вязкость типа Навье-Стокса его размазывает. При отключении всей вязкости ($\tau=0$) решение оказывается абсолютно неустойчивым.

Тест 6. Задача представляет собой расчет медленно движущегося контактного разрыва. Расчет проведен при $\alpha=0.4$ и $\beta=0.1$, $Sc=1$. Фиг. 18 иллюстрирует влияние коэффициентов вязкости и теплопроводности для $h=0.01$ - уменьшение этих коэффициентов ($Sc=0.1$) улучшает качество численного решения. Однако полное исключение искусственной диссипации типа Навье-Стокса ($Sc=0$) приводит к появлению осцилляций. Сходимость численного решения по сетке для $Sc=0.1$ видна на Фиг. 19.

Тест 7. В качестве последнего теста из серии задач Римана рассматривается задача "reak problem". Эта задача представляет собой расчет течения, включающего в себя сильную ударную волну с перепадом плотности ~ 30 , волну разрежения и контактный разрыв между ними. Расчет проведен при $\alpha=0.3$, $\beta=0.3$, $Sc=1$ и $Pr=1$. При увеличении коэффициента α численное решение сильнее размазывается по сетке, при его уменьшении - на фронтах волн сжатия и разрежения появляются осцилляции. При уменьшении коэффициентов вязкости и теплопроводности (число $Sc=0.1$) или только коэффициента теплопроводности ($Pr=1000$) численное решение

теряет устойчивость.

Сходимости решения при уменьшении шага сетки для профилей плотности и скорости показана на Фиг. 20, 21 и 22. Как отмечено в [3] и [4], все рассмотренные там схемы имеют недостатки при вычислении скорости, особенно в окрестности волны разрежения ($x \sim -0.32$), где перепад плотности очень мал и составляет ~ 0.004 (Фиг.22). На всех приведенных рисунках линия б обозначает автомодельное решение.

3. Задача о взаимодействии двух разрывов

В этом разделе решается задача Вудворда-Колелла (Woodward-Collela blast wave problem), или задача о взаимодействии двух разрывов [3], [4], [14]. В [15] эта же задача выбрана в качестве теста для алгоритмов решения уравнений Эйлера на сетках, динамически адаптирующихся к решению.

Данная задача представляет собой задачу о взаимодействии двух волн, образующихся в результате распада двух разрывов типа Римана. Для этой задачи нет автомодельного решения.

Задача решается на интервале $(-0.5, +0.5)$. В начальный момент задаются разрывы в точках $x_1 = -0.4$ и $x_2 = 0.4$. Во всей расчетной области задается плотность $\rho = 1$ и скорость $u = 0$. Начальные значения давления в трех соответствующих областях левой p_l , средней p_m и правой p_r равны $(p_l, p_m, p_r) = (1000, 0.01, 100)$. В качестве граничных условий ставятся условия отражения вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u = 0.$$

Расчет ведется до времени $t_{fin} = 0.038$. В этой задаче $\gamma = 7/5$.

Оптимальными параметрами расчета являются $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.4$, $Pr=1$, $Sc=1$. Уменьшение коэффициента α приводит к появлению осцилляций в профиле плотности. Уменьшение коэффициентов вязкости и теплопроводности ($Sc=0.1$) также приводит к численной неустойчивости, см. Фиг. 23. Уменьшение численной теплопроводности ($Pr=1000$) практически не ска-

зывается на численном решении задачи, так как рассматриваемые здесь процессы протекают на относительно коротких временах.

Распределения плотности и скорости на последовательности сеток при выборе параметра регуляризации с коэффициентами $\alpha = 0.3$ и 0.2 представлены на Фиг. 24 и 25. В этой задаче чувствительными характеристиками являются распределения плотности, температуры и внутренней энергии. Из расчетов следует, что достаточно точное распределение плотности достигается лишь на подробных сетках, в то время как профили скорости (Фиг. 25) и давления хорошо разрешаются и на грубых сетках.

4. Задача о взаимодействии ударной волны и волны энтропии

Задача о взаимодействии ударной волны и волны энтропии (Shu-Osher shock entropy wave interaction problem) была впервые предложена и численно решена в [12]. Этот тест показывает поведение разностного алгоритма при описании взаимодействия гладкого решения с ударной волной - а именно, описание взаимодействия движущейся ударной волны, для которой число Маха = 3, с малым возмущением энтропии. Также, как и предыдущая, эта задача не имеет автомодельного решения.

Указанный тест часто используется для апробации возможностей разностных алгоритмов. Так, в [13] этот тест выбран для демонстрации возможностей разностных схем повышенного порядка точности, в ряде работ на этом же примере демонстрируются свойства схем, предназначенных для расчетов турбулентных течений в рамках LES подхода (численное моделирование крупных вихрей). Далее указанная задача рассматривается в постановке [4].

Задача решается в области $(-5,5)$, разрыв располагается в точке $x_0 = 4$. Начальные условия близки к условиям для задачи Римана: значения на левом интервале составляют $(\rho_l, u_l, p_l) = (3.857143, 2.629369, 10.33333)$, а на правом интервале задаются сглаженная плотность и постоянные значения скорости и давления $(\rho_r, u_r, p_r) = (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1)$. $\gamma = 7/5$. Время

окончания расчета составляет $t_{fin} = 1.8$.

Оптимальными параметрами расчета являются $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $Pr=1$, $Sc=1$. Уменьшение коэффициента α приводит к появлению осцилляций в профиле плотности. Увеличение коэффициента α или коэффициентов вязкости и теплопроводности ($Sc=10$) приводит к излишнему сглаживанию решения. Уменьшение численной теплопроводности ($Pr=100$) практически не сказывается на численном решении задачи, см. Фиг. 26, где $h=0.01$. Сходимость численного решения по сетке для $\alpha = 0.2$ показана на Фиг. 27.

Заключение

В данной работе показано, что КГД метод расчета уравнений Эйлера позволяет единообразно моделировать широкий круг нестационарных газодинамических течений. Описанный численный алгоритм имеет два основных параметра настройки – это численный коэффициент α , входящий в параметр регуляризации τ , и коэффициент β , определяющий устойчивость численного алгоритма (число Куранта). Во всех приведенных примерах величина α составляла $0.2 - 0.5$, а значения β находятся в пределах $0.1 - 0.4$. Исключение составили тесты 3 и 3а, которые соответствовали сверхсильным ударным волнам и сверхвысоким перепадам давления. Здесь $\alpha = 0.5$ и 0.7 , и $\beta = 0.001$ и 0.01 , соответственно.

Для всех рассмотренных примеров расчеты демонстрируют уверенную сходимость численного решения к эталонным решениям при сгущении пространственной сетки.

Проведенные исследования показали, что КГД алгоритм дает возможность получать решение одномерных задач нужного качества на более подробных сетках, чем методы, изученные в [3], [4] и [9]. Однако простота численной реализации, однородность алгоритма и уже опробованные обобщения алгоритма на многомерные и неструктурированные пространственные сетки делает КГД подход конкурентноспособным по сравнению с существующими численными методами решений уравнений Эйлера.

Параметры настройки КГД алгоритма, подобранные в тестовых примерах для одномерных течений, позволят более эффективно проводить расчеты как многомерных вязких течений, так и расчеты реальных течений с использованием неструктурированных сеток, где проведение настройки алгоритма представляется трудоемким.

Список литературы

- [1] *Рождественский Б.Л., Яценко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
- [3] Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations. Technical report LA-UR-01-6225, LANL, Los Alamos, 2001.
- [4] Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations// SIAM J. Sci. Comput, 2003, V. 25. № 3, P. 995-1017.
- [5] *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. Ун-т, 2000.
- [6] *Елизарова Т.Г., Соколова М.Е., Шеретов Ю.В.* Квазигазодинамические уравнения и численное моделирование течений вязкого газа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т.45. № 3. С.544-555.
- [7] *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научн. мир, 2007.

- [8] Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.
- [9] Toro E. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.
- [10] Граур И.А. Разностные схемы расщепления для решения уравнений эйлера, построенные на основе квазигазодинамических уравнений// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 1. С. 166-178.
- [11] Noh W.F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux// J. Comput. Phys. 1987. V. 72. P.78-120.
- [12] Shu C., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II// J. Comput. Phys. 1989. V. 83. P.32-78.
- [13] Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Хотяновский Д.В. Применение схем повышенного порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений// Матем. моделирование. 2007. Т.19. № 7. С. 39-55.
- [14] Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks// J. Comput. Phys. 1984. V. 54. P.115-173.
- [15] Бреславский П.В., Мажукин В.И. Моделирование взаимодействия ударных волн на динамически адаптирующихся сетках// Матем. моделирование. 2007. Т.19. № 11. С. 83-95.

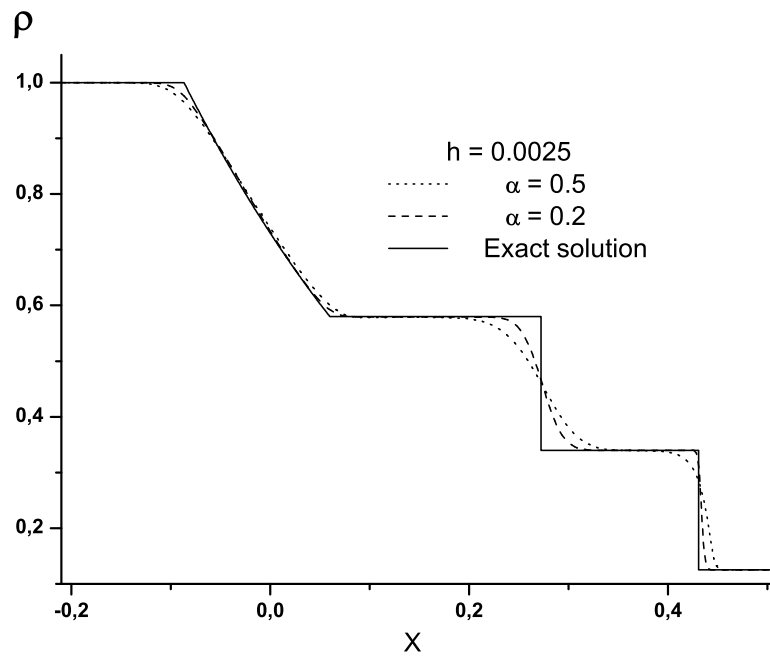


Рис. 1: Тест 1. Распределение плотности ρ . Зависимость решения от параметра регуляризации.

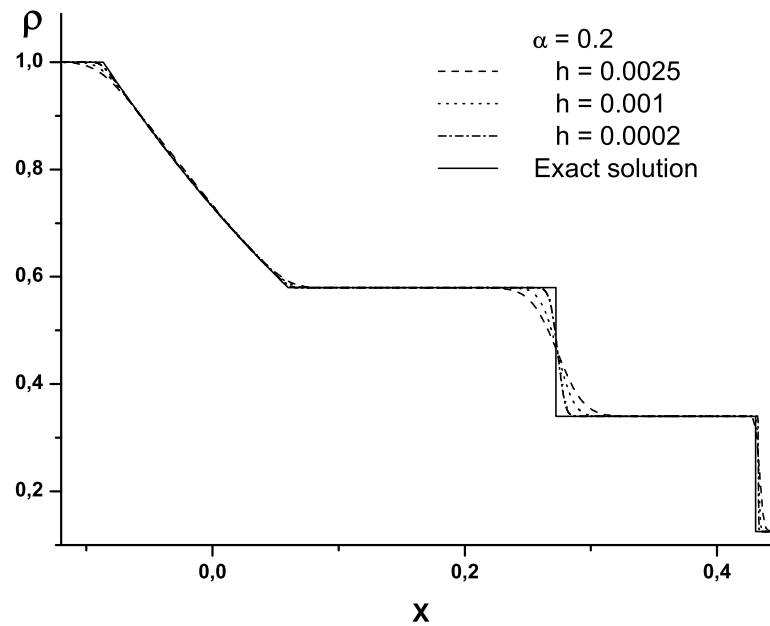


Рис. 2: Тест 1. Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.

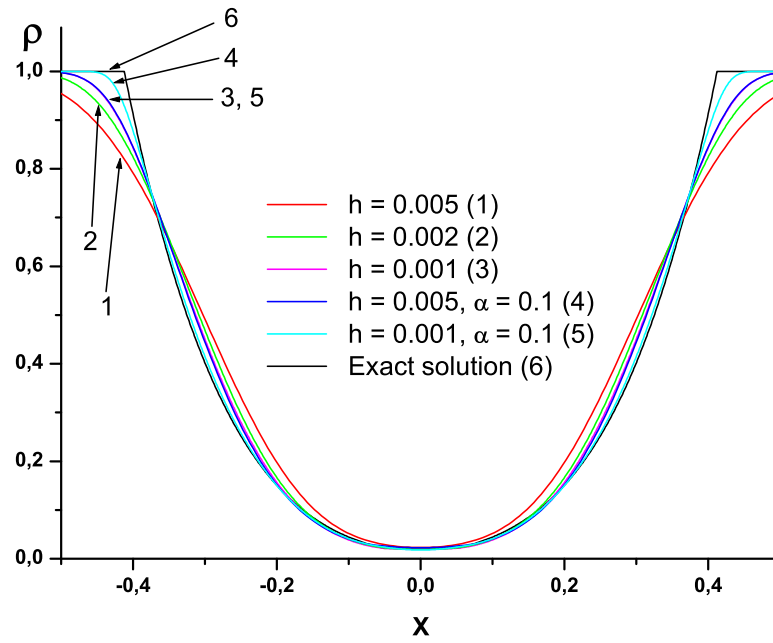


Рис. 3: Тест 2. Распределение плотности ρ . Сходимость решения по сетке. $\alpha = 0.5$, если не указано другое.

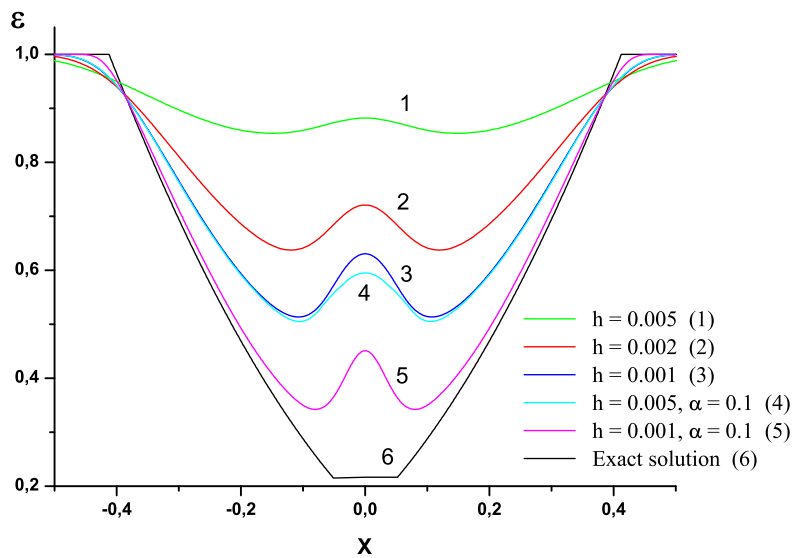


Рис. 4: Тест 2. Распределение внутренней энергии ε . Сходимость по сетке.

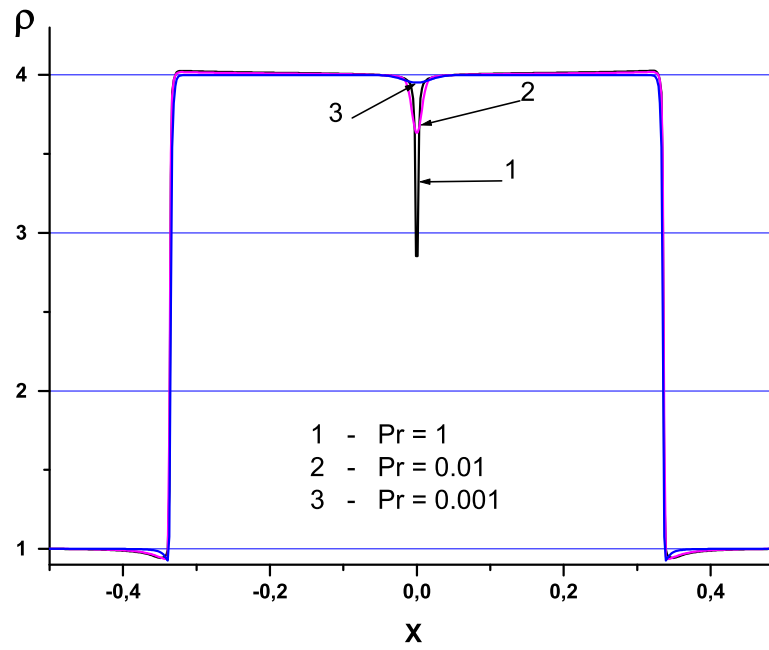


Рис. 5: Тест 3. Распределение плотности ρ . Зависимость решения от числа Прандтля Pr .

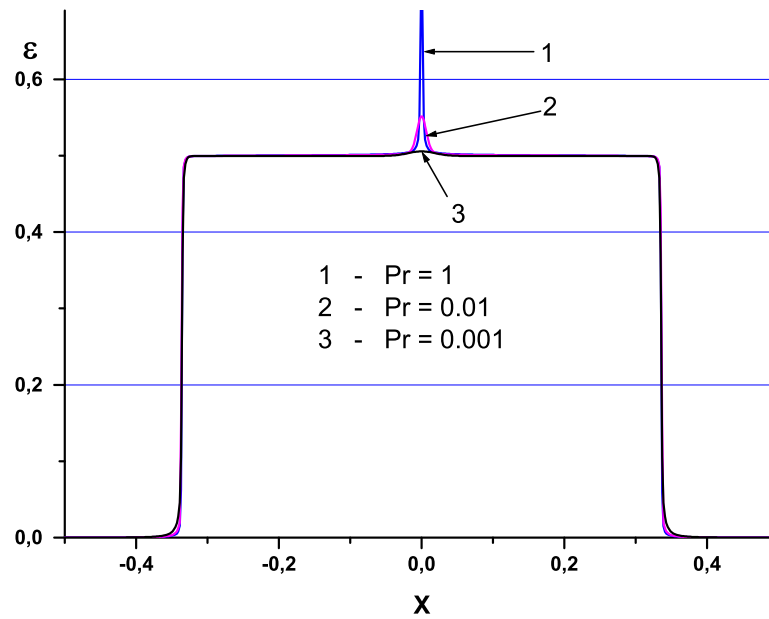


Рис. 6: Тест 3. Распределение внутренней энергии ε . Зависимость решения от числа Прандтля Pr .

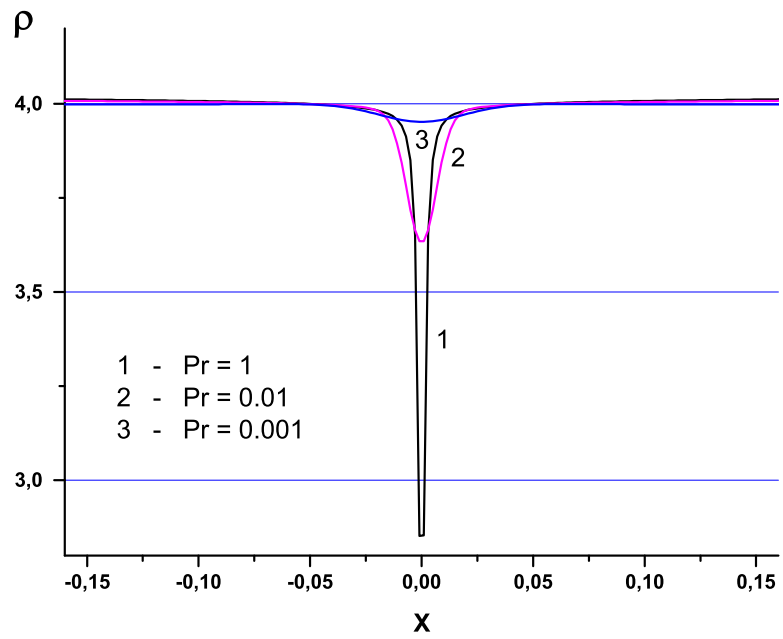


Рис. 7: Тест 3. Распределение плотности ρ . Зависимость решения от числа Прандтля Pr . Фрагмент.

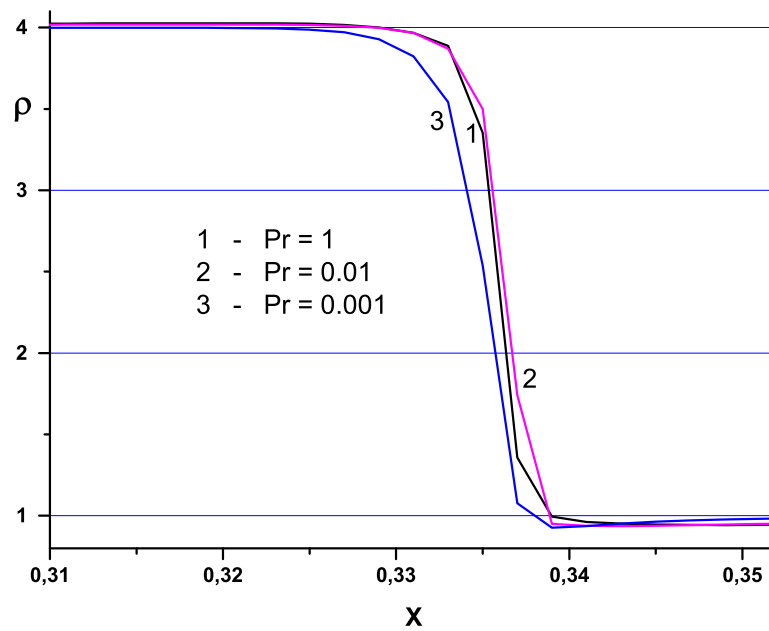


Рис. 8: Тест 3. Распределение плотности ρ . Зависимость решения от числа Прандтля Pr . Фрагмент.

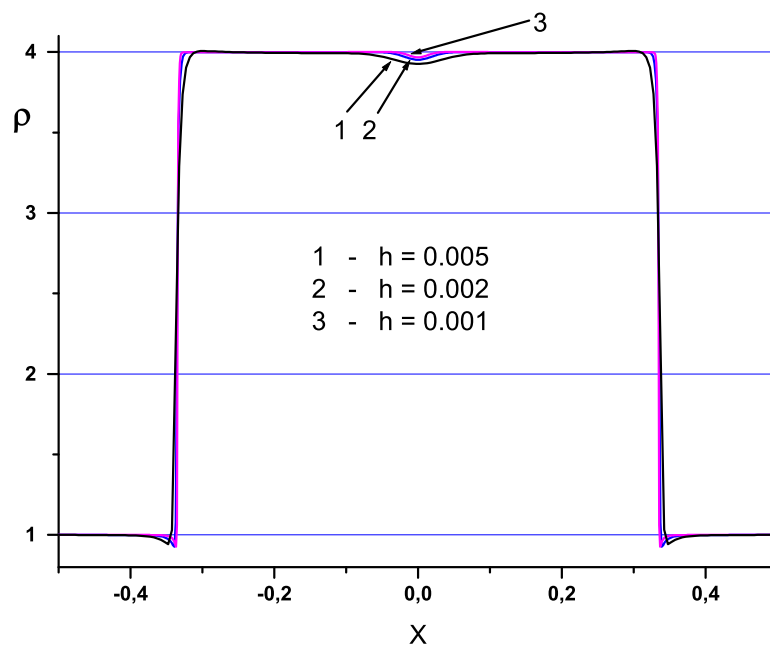


Рис. 9: Тест 3. Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.

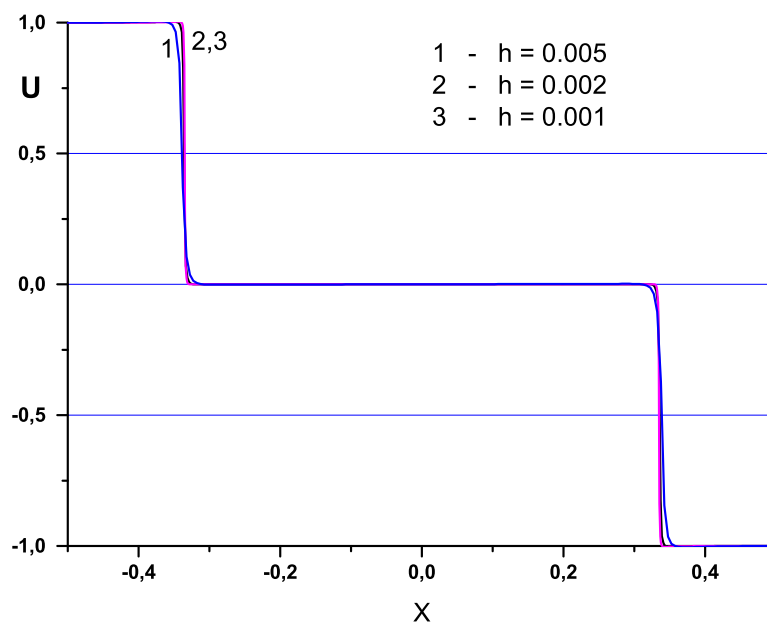


Рис. 10: Тест 3. Распределение скорости u . Сходимость по сетке.

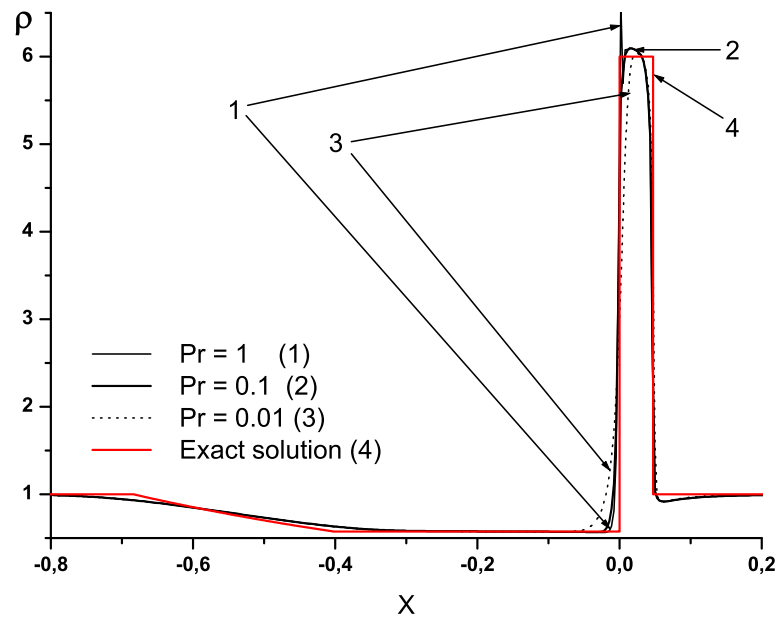


Рис. 11: Тест За. Распределение плотности ρ . Зависимость решения от числа Прандтля Pr .

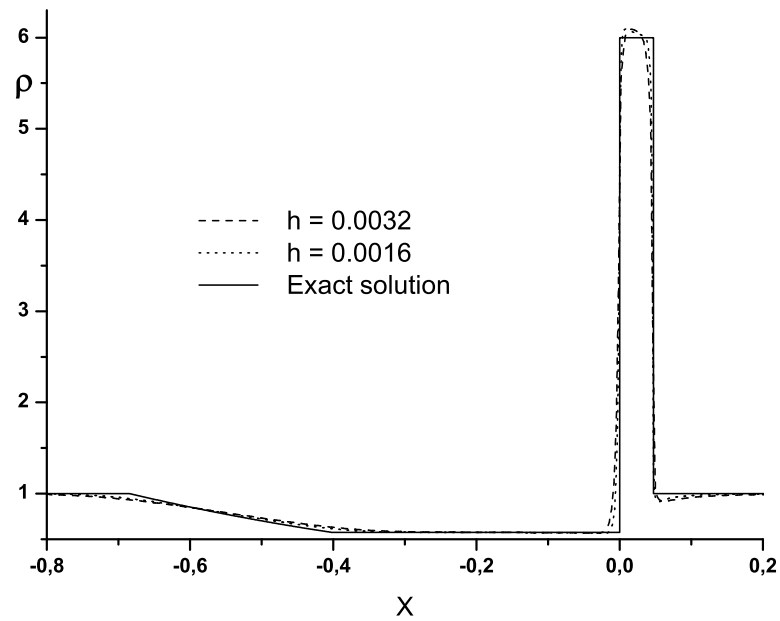


Рис. 12: Тест За. Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.

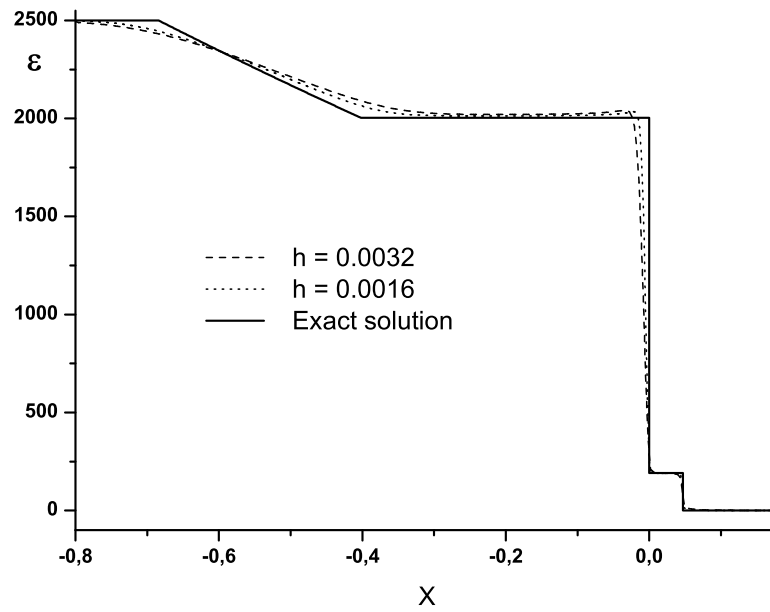


Рис. 13: Тест За. Распределение внутренней энергии ε . Сходимость по сетке.

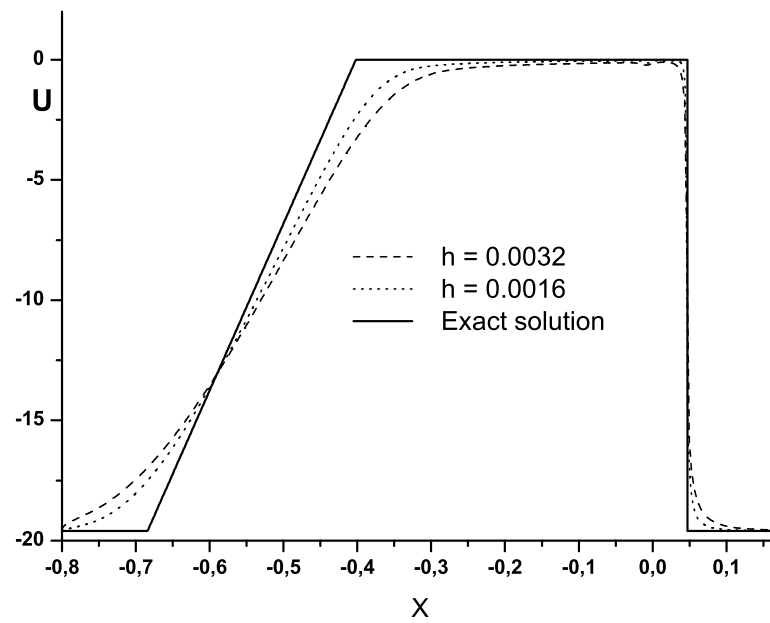


Рис. 14: Тест За. Распределение скорости u . Сходимость по сетке.

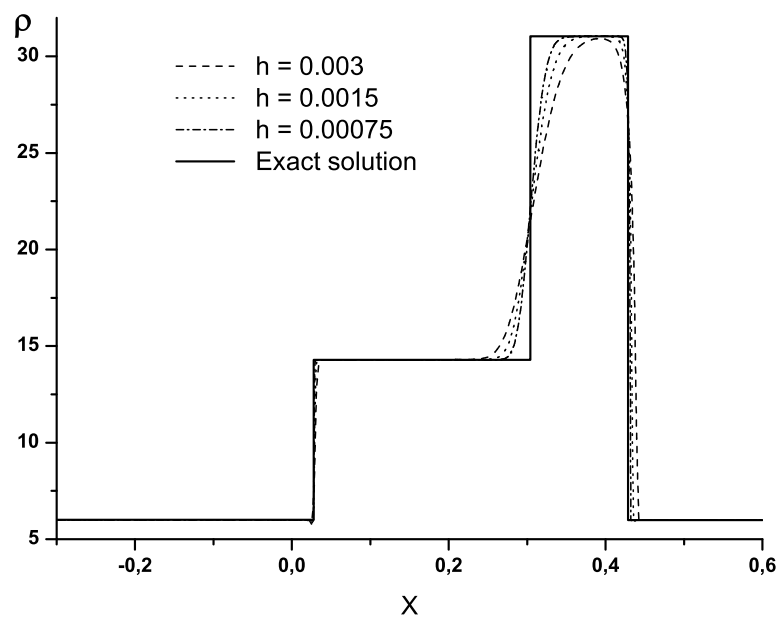


Рис. 15: Тест 4. Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.

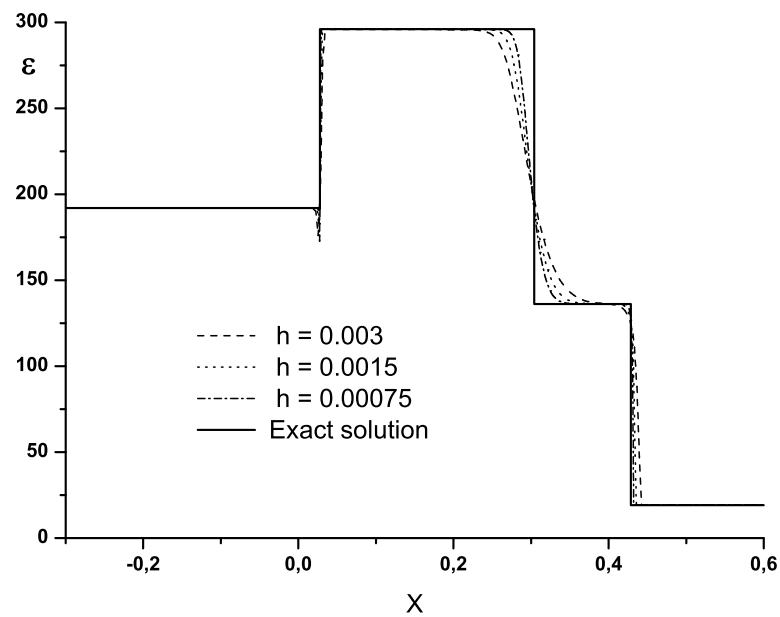


Рис. 16: Тест 4. Распределение внутренней энергии ε . Сходимость по сетке.

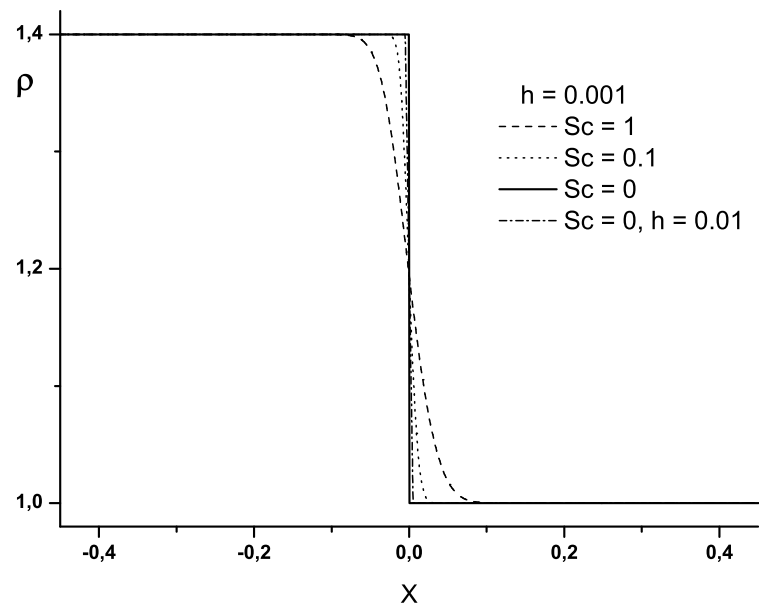


Рис. 17: Тест 5. Распределение плотности ρ в контактном разрыве. Зависимость решения от числа Шмидта Sc .

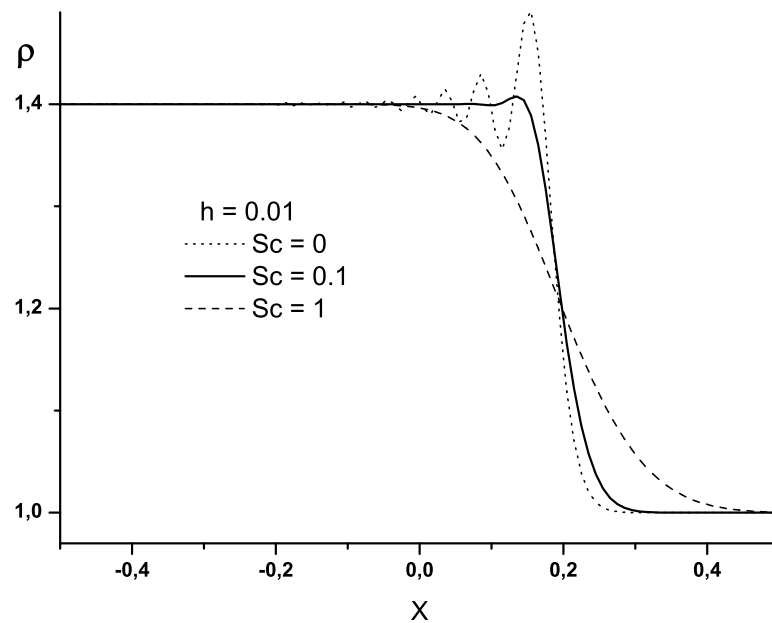


Рис. 18: Тест 6. Распределение плотности ρ в движущемся контактном разрыве. Зависимость решения от числа Шмидта Sc .

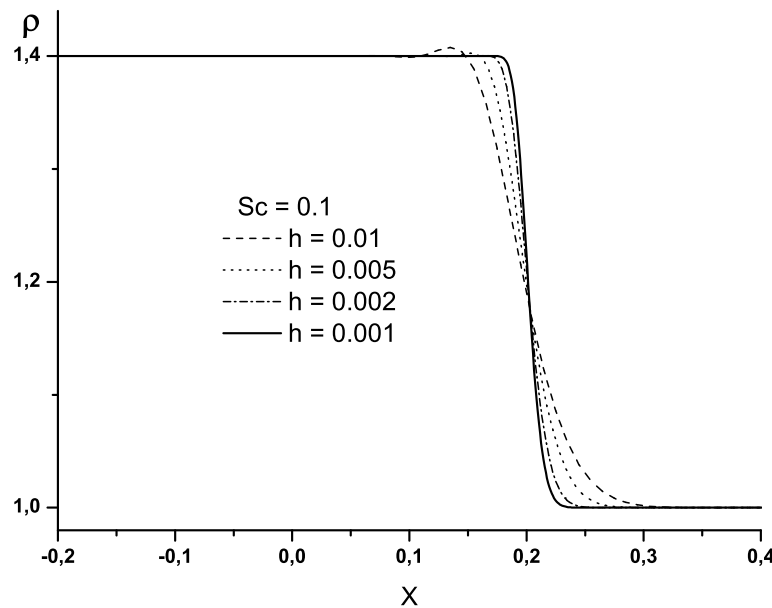


Рис. 19: Тест 6. Распределение плотности ρ в движущемся контактном разрыве. Сходимость по сетке при $Sc = 0.1$.

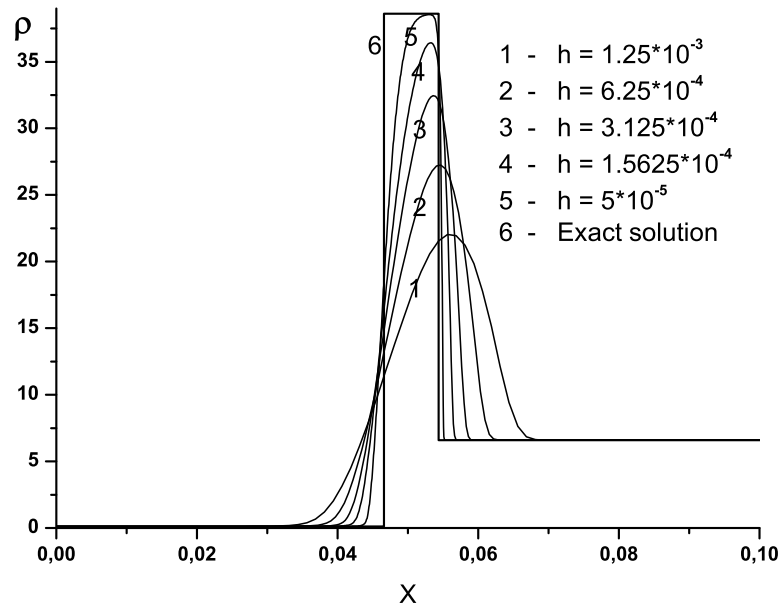


Рис. 20: Тест 7. "Peak problem". Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.

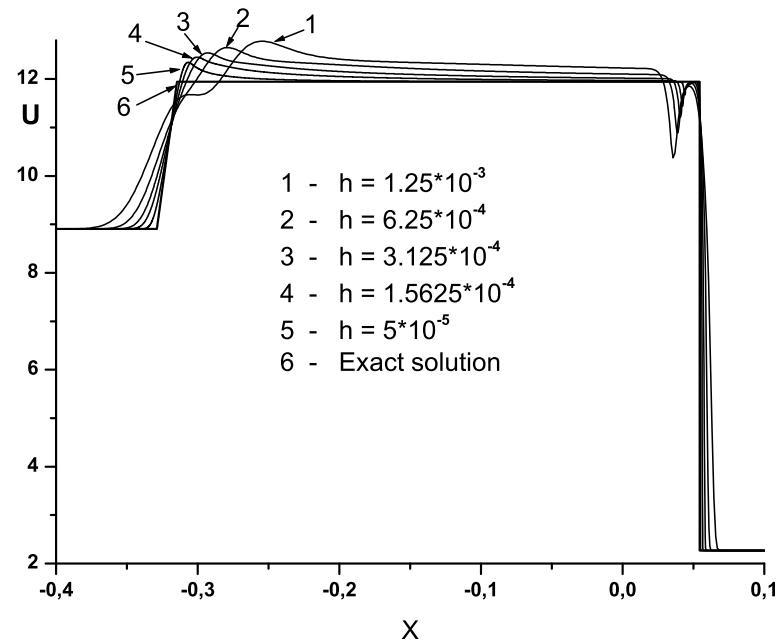


Рис. 21: Тест 7. "Peak problem". Распределение скорости u . Сходимость по сетке.

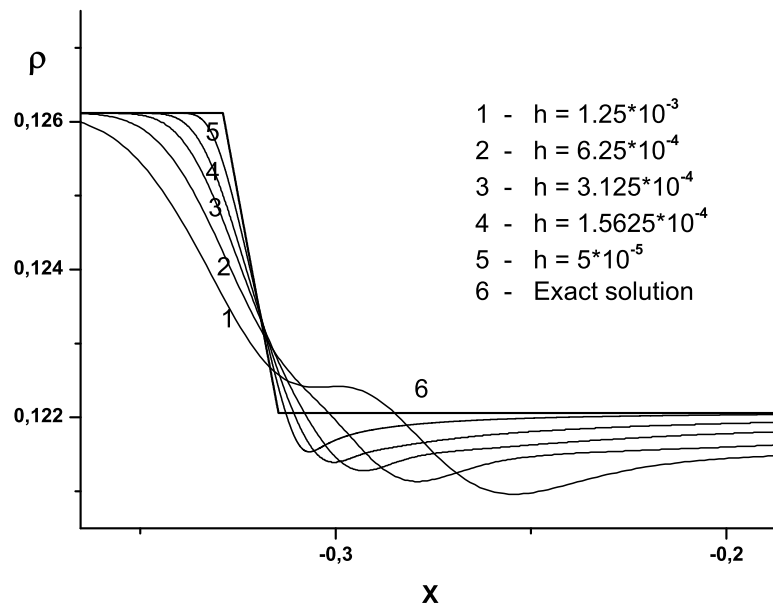


Рис. 22: Тест 7. "Peak problem". Распределение плотности ρ в окрестности волны разрежения. Сходимость по сетке.

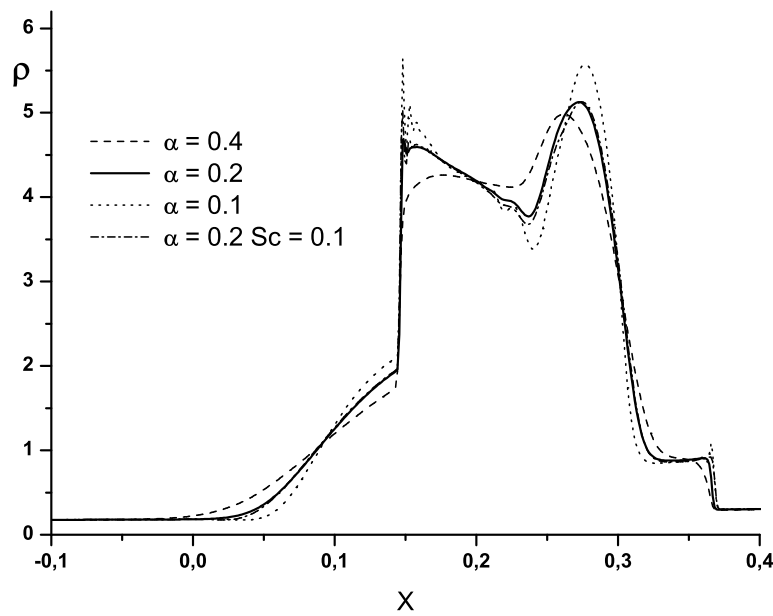


Рис. 23: Тест "Blust problem". Распределение плотности ρ . Зависимость от параметра регуляризации.

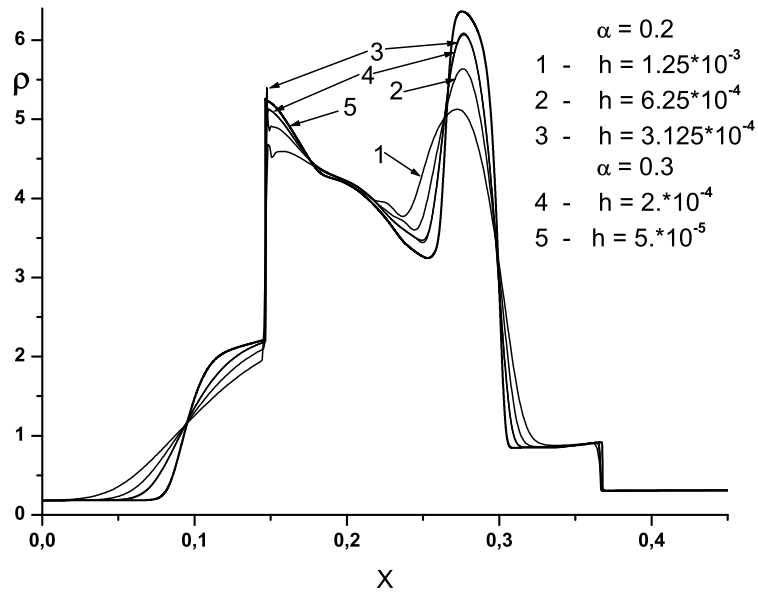


Рис. 24: Тест "Blust problem". Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.

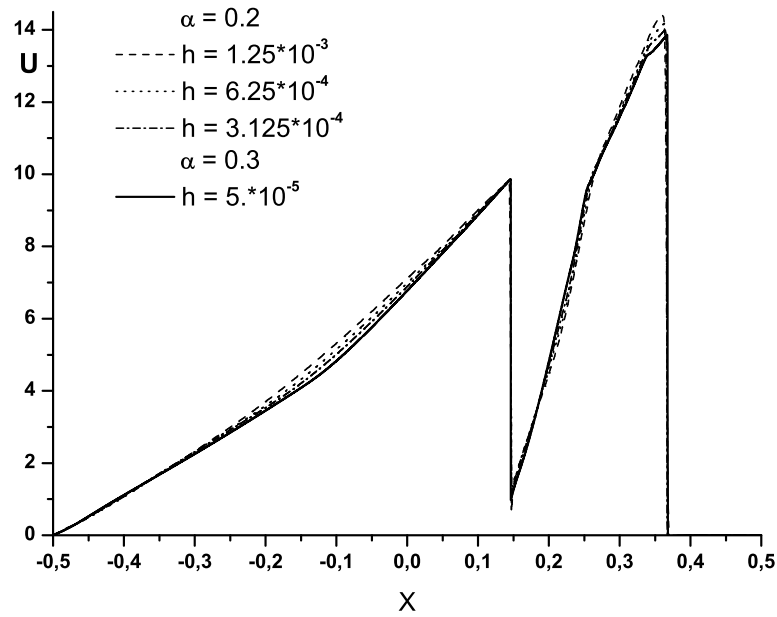


Рис. 25: Тест "Blust problem". Распределение скорости u . Сходимость по сетке.

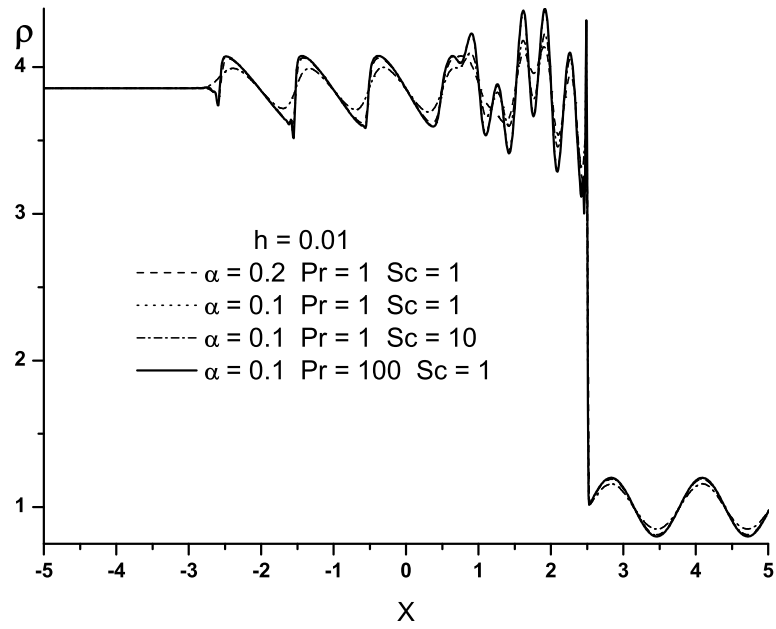


Рис. 26: Тест "Shu-Osher problem". Распределение плотности ρ . Зависимость от параметра регуляризации.

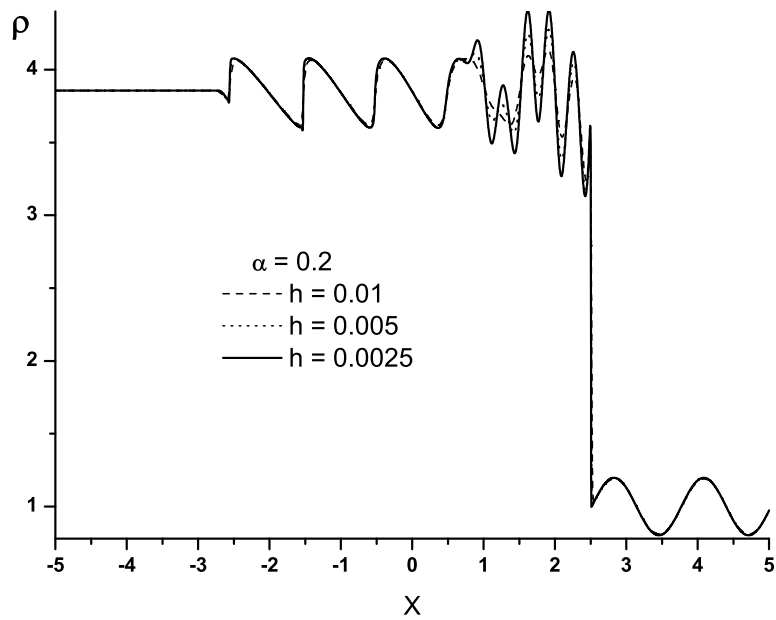


Рис. 27: Тест "Shu-Osher problem". Распределение плотности ρ . Сходимость по сетке.