

*И. А. Широков, Т.Г. Елизарова*

## **Применение квазигазодинамических уравнений к моделированию пристеночных турбулентных течений**

### **Аннотация**

Мы представляем возможности численного метода, основанного на квазигазодинамических (КГД) уравнениях, для моделирования турбулентного пограничного слоя. В качестве примера использовано дозвуковое течение Куэтта в азоте, при этом значения динамического числа Рейнольдса составляли 153 и 198. КГД система отличается от системы уравнений Навье-Стокса дополнительными нелинейными диссипативными слагаемыми с малым параметром в качестве коэффициента. При моделировании турбулентных течений эти слагаемые описывают неразрешаемые на сетке мелкомасштабные эффекты. Сравнение полученных данных (профилей скорости и среднеквадратичных пульсаций скорости) с результатами прямого численного моделирования (DNS) и эталонными экспериментальными данными показывает, что КГД алгоритм адекватно описывает вязкий и логарифмический слои вблизи стенки. При этом, в сравнении с методами DNS высокой точности, КГД алгоритм позволяет использовать относительно большой шаг пространственной сетки во внутренней части вязкого подслоя. Таким образом, общее число узлов сетки в турбулентном пограничном слое может быть невелико. В отличие от различных вариантов метода крупных вихрей (LES), КГД алгоритм не требует введения пристеночных функций, поскольку дополнительные слагаемые обращаются в нуль вблизи стенки. В случае малых чисел Рейнольдса, КГД алгоритм описывает ламинарное течение Куэтта.

*Ключевые слова:* турбулентный пограничный слой, квазигазодинамические уравнения, дозвуковое течение Куэтта, подсеточная диссипация

### **Введение**

В данной работе впервые представлены возможности конечно-разностного алгоритма, основанного на квазигазодинамических (КГД) уравнениях, для численного моделирования турбулентного пограничного слоя. В качестве примера выбрано газодинамическое течение Куэтта в плоском канале.

Известно, что турбулентные газодинамические течения вблизи твердой стенки в области как вязкого, так и логарифмического подслоя, могут быть описаны путем прямого численного моделирования (DNS) на

основе уравнений Навье–Стокса в сжимаемой или несжимаемой формулировке [1–3]. Однако DNS методы требуют довольно высокого пространственного разрешения, при котором обеспечивается наличие нескольких точек сетки в вязком подслое. С увеличением числа Рейнольдса ( $Re$ ) вычислительные затраты при прямом численном моделировании пристеночных потоков, по разным оценкам, возрастают пропорционально  $Re^{2.4}–Re^3$  [3, 4]. Это неприемлемо для численного моделирования высокоскоростных потоков, даже с использованием современных многопроцессорных вычислительных систем.

Число точек сетки в пристеночной области может быть уменьшено при использовании метода крупных вихрей (LES) [2, 3]. Однако в непосредственной близости от стенки поведение подсеточной диссипации, обычно используемой в LES моделях, имеет нефизический характер. Для того, чтобы закон стенки выполнялся, должны быть введены так называемые пристеночные функции [3, 5].

Использование пристеночных функций дает возможность расположить первую расчетную точку сетки внутри логарифмического подслоя. Это снижает требования к разрешению в пограничном слое, и вычислительные затраты растут пропорционально  $Re^{0.5}$  [3]. Однако моделям пристеночных функций не хватает физического обоснования, и они должны быть тщательно откалиброваны, в зависимости от используемого численного алгоритма и характера течения. Тем не менее, метод пристеночных функций успешно применялся для численного моделирования безотрывных течений и был расширен для моделирования отрывных течений [3].

В этой связи, разработка новых вычислительных алгоритмов (менее требовательных к вычислительным ресурсам ограничений, чем DNS, или без пристеночных функций, как LES) является важной задачей при моделировании как безотрывных, так и отрывных пристеночных турбулентных течений.

Благодаря простоте постановки задачи и большому количеству опубликованных экспериментальных результатов и результатов численного моделирования, течение Куэтта часто служит тестом при исследовании численных алгоритмов, предназначенных для моделирования безотрывных пристеночных течений. В качестве эталонных данных используются профили скорости и пульсаций скорости в вязком и логарифмическом подслое, полученные в экспериментах. Так, профили осредненной скорости в турбулентном течении Куэтта, зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса, и эмпирическая формула, выражающая эту зависимость, приведены в [6] и [7]. Профили среднеквадратичных пульсаций вблизи стенки показаны в [8–11]. В работах [10, 12, 13] на основе изучения детального профиля

осредненной скорости вблизи стенки определены численные коэффициенты в двухслойной модели пристеночной турбулентности.

Численное моделирование турбулентного течения Куэтта на основе DNS моделей проведено в работах [4, 11, 14–16]. Результаты, полученные в [11], хорошо согласуются с экспериментальными данными из [6–10]. Результаты, приведенные в [4, 14–16], также разумно согласуются с данными экспериментов. Однако значения констант двухслойной модели турбулентности, полученные в [4, 14–16], несколько меньше экспериментальных значений из [6–10].

В качестве альтернативного подхода к численному моделированию турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, авторы предлагают использовать так называемую систему квазигазодинамических (КГД) уравнений, и численный алгоритм, построенный на ее основе (КГД алгоритм).

КГД уравнения основаны на сглаженных (регуляризованных) уравнениях Навье–Стокса [17–19]. Эти уравнения были предложены более тридцати лет назад для моделирования сверхзвуковых течений идеального газа. КГД систему отличают от системы уравнений Навье–Стокса диссипативные слагаемые, величина которых определяется параметром  $\tau$  ( $\tau$ -слагаемые). Эти слагаемые играют роль адаптивных регуляризаторов, которые стабилизируют численное решение в зонах больших градиентов параметров, но становятся исчезающе малыми в областях стационарного гладкого течения. В асимптотическом приближении пограничного слоя [1]  $\tau$ -слагаемые исчезают, и КГД уравнения принимают форму классических уравнений Прандтля, аналогично системе Навье–Стокса [18].

Одним из достоинств численных алгоритмов, построенных на основе КГД уравнений, является тот факт, что они позволяют обойтись без разнесенных сеток и различных процедур монотонизации. Для всех пространственных производных может быть использована аппроксимация центральными разностями в явной по времени конечно-разностной схеме. Многочисленные примеры успешного использования КГД алгоритма для расчетов широкого круга нестационарных дозвуковых и сверхзвуковых газодинамических течений приведены в работах [17–20], а также в цитированных там и последующих публикациях.

В частности, в [20] на основе КГД системы был построен и применен на практике алгоритм моделирования магнитогидродинамических (МГД) течений идеального газа. Точность и сходимость предложенного метода была подтверждена на многочисленных стандартных МГД тестах, включая трехмерное сверхзвуковое невязкое течение (вихрь) Орсага-Танга.

В недавних работах [19, 20] приведен обзор результатов, полученных на основе КГД модели, включая сверхзвуковые и дозвуковые тесты и теоретические выводы. В данной работе мы не будем повторять этот обзор.

Обширная практика расчетов показывает, что КГД алгоритм является весьма перспективным для моделирования турбулентных течений при умеренных числах Рейнольдса.

Первое систематическое исследование возможностей КГД алгоритма для моделирования турбулентности было выполнено на примере вязкого течения (вихря) Тейлора–Грина в свободном пространстве [21]. Вычисления проводились для турбулентного и ламинарного режимов, включая ламинарно-турбулентный переход, при числах Рейнольдса от 100 до 5000. Рассматривалось течение азота при температуре нормальных условий. При этом  $\tau$ -слагаемые регуляризуют численное решение для ламинарных течений, а в турбулентном случае обеспечивают механизм подсеточной диссипации, осредняя неразрешаемые на сетке особенности течения. Исследования показывают, что КГД алгоритм требует меньшего количества точек сетки для достижения той же точности, что и DNS методы. При этом КГД алгоритм оказывается более точным, чем LES метод при использовании такого же числа точек. В [21] приведена краткая история КГД моделей и их построение посредством осреднения по времени системы Навье–Стокса, а так же краткое описание соответствующих конечно-разностных алгоритмов.

Для практических применений представляет большой интерес моделирование турбулентных течений вблизи поверхностей. В настоящей работе мы впервые изучаем возможности КГД алгоритма для моделирования пристеночных турбулентных течений. В качестве примера используется каноническое плоское течение Куэтта между двумя бесконечными плоскостями, при этом рассматривается азот при температуре нормальных условий.

В разделе 2 описана постановка задачи и приведены значения газодинамических параметров. В разделе 3 приведены КГД уравнения в декартовых координатах, что удобно для реализации численного алгоритма на их основе.

В разделе 4 даны общие замечания по численному алгоритму, включая определение настроечных параметров и осредненных величин.

Подробное изложение результатов численного моделирования при  $Re = 3000$  (что соответствует динамическому числу Рейнольдса  $Re_{\tau} = 153$ ) дано в разделе 5. В разделе 6 приведены основные результаты для  $Re = 4250$  ( $Re_{\tau} = 198$ ).

Результаты моделирования в ламинарном случае ( $Re=300$ ) и сравнение коэффициентов трения для различных чисел Рейнольдса приведены в разделах 7 и 8 соответственно. В заключении мы приводим краткий обзор полученных в работе результатов и перспективы применения КГД алгоритма для моделирования турбулентных течений.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерную расчетную область в декартовых координатах:  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$ ,  $-L_z/2 \leq z \leq L_z/2$  (рис. 1).

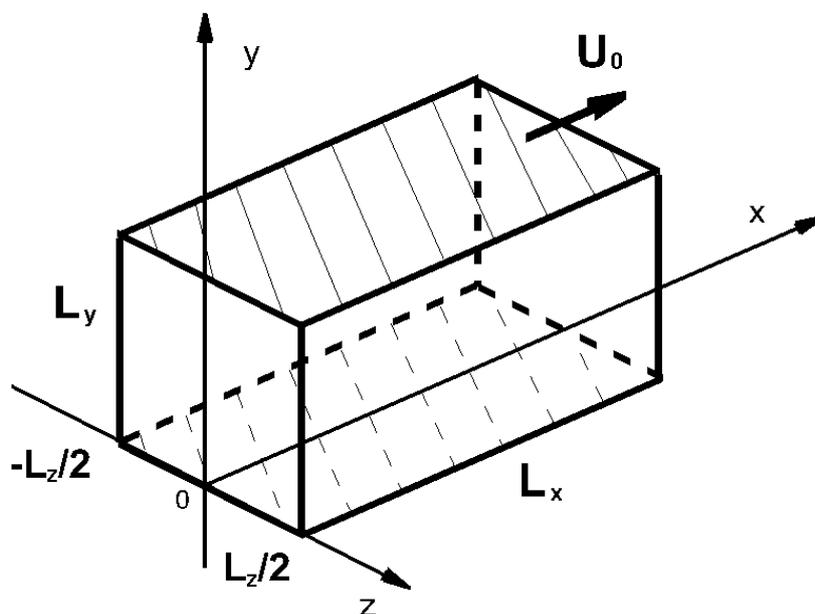


Рис. 1. Общий вид расчетной области.

Граница  $y=0$  представляет собой неподвижную твердую стенку. Противоположная граница  $y=L_y$  является твердой стенкой, которая движется с постоянной скоростью  $U_0$  в направлении положительных значений  $x$ . Область заполнена азотом. Состояние газа описывается плотностью  $\rho(x, y, z, t)$ , компонентами макроскопической скорости  $u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_y(x, y, z, t)$ ,  $u_z(x, y, z, t)$ , и давлением  $p(x, y, z, t)$ . Предполагаем газ идеальным:  $p = \rho RT$ . Значения газодинамических параметров указаны в табл. 1.

Таблица 1

Газодинамические параметры

$R = 297 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}).$	Газовая постоянная азота
$\gamma = 7/5$	Показатель адиабаты азота
$Pr = 14/19$	Число Прандтля азота
$T_0 = 273 \text{ К}$	Температура начальных условий
$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega$	Вязкость азота в зависимости от температуры
$\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5} \text{ кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$	Вязкость азота при $T_0 = 273 \text{ К}$
$\omega = 0.74$	Показатель межмолекулярного взаимодействия
$U_0 = 168.5 \text{ м}/\text{с}$	Скорость движения стенки канала
$c_s = \sqrt{\gamma RT}$	Скорость звука
$c_{s0} = \sqrt{\gamma RT_0} = 337 \text{ м}/\text{с}$	Скорость звука при начальных условиях
$Ma = U_0 / c_{s0} = 0.5$	Начальное число Маха

Начальная температура постоянна во всей области:  $T = T_0 = 273 \text{ К}$ . Начальные давление и плотность тоже постоянны и определяются уравнением состояния.

Граничные условия являются периодическими вдоль осей  $x$  и  $z$ . На твердых стенках ставятся условия прилипания ( $u_x = u_y = u_z = 0$  при  $y = 0$ ;  $u_x = U_0$ ,  $u_y = u_z = 0$  при  $y = L_y$ ), а также условия  $\partial T / \partial n = 0$ ,  $\partial p / \partial n = 0$  и  $\partial \rho / \partial n = 0$ , поскольку стенки считаем адиабатическими.

В качестве начального условия для продольной скорости используем ламинарный профиль для несжимаемого течения:

$$u_x = U_0 y / L_y. \quad (1)$$

При малых значениях начального числа Рейнольдса  $Re = \rho_0 (U_0 / 2)(L_y / 2) / \mu_0$  течение будет ламинарным. При увеличении  $Re$  происходит переход к турбулентному течению.

Известно, что инициирование турбулентного течения (выбор начального возмущения, развитие которого скорейшим образом приводит к формированию неустановившегося колебательного процесса) является сложной математической задачей. Как правило, в качестве такого возмущения задаются наименее устойчивые собственные

функции краевой задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда (волны Толлмина–Шлихтинга) [3], [11], [22].

В данной работе для поперечных компонент скорости мы вводим простое начальное возмущение следующего вида:

$$u_y = u_z = 0.2 U_0 \sin(8\pi x / L_x). \quad (2)$$

Кроме того, вводятся дополнительные малые возмущения скорости (турбулизаторы) вдоль ребер расчетной области. А именно, компоненты скорости на четырех ребрах, параллельных скорости течения, не равны скорости стенки, а берутся из соседней ячейки разностной сетки.

### 3. Математическая модель

Турбулентное течение газа будем описывать макроскопической системой КГД уравнений [17–19], краткий вывод которой приведен в [21]. КГД-система определяет эволюцию во времени плотности, скорости и давления газа, зависящих от эйлеровых координат и от времени. Выпишем КГД-систему в декартовых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (5)$$

Полная энергия единицы объема  $E$  и полная удельная энтальпия  $H$  вычисляются по формулам  $E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$  и  $H = (E + p) / \rho$ . Вектор плотности потока массы  $j_m^i$  определяется следующим образом:

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p). \quad (6)$$

Выражения для тензора вязких напряжений  $\Pi^{ij}$  и теплового потока  $q^i$  записываются так:

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \quad (7)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \quad (8)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho}), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T. \quad (9)$$

Здесь – символ Кронекера ( $\delta^{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta^{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ) и  $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$  – внутренняя энергия единицы массы газа.  $\Pi_{NS}^{ij}$  и  $q_{NS}^i$  – тензор вязких напряжений и тепловой поток в системе Навье-Стокса.

Коэффициент теплопроводности выражается соотношением [19]:

$$\kappa = \frac{\mu \gamma R}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

где  $Pr$  – число Прандтля [19, 23]. Коэффициент динамической вязкости  $\mu$  в выражениях (7)–(10) для  $\Pi_{NS}^{ij}$  и  $q_{NS}^i$  определим через температурную зависимость [19]:

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega, \quad (11)$$

где  $\omega$  описывает межмолекулярное взаимодействие в газе [23]. Коэффициент второй (объемной) вязкости определим через соотношение [19]:

$$\zeta = \mu (5/3 - \gamma). \quad (12)$$

Релаксационный параметр  $\tau$ , входящий в (6)–(9), определим как

$$\tau = \alpha h / c_s, \quad (13)$$

где  $c_s = \sqrt{\gamma R T}$  – местная скорость звука и  $h$  – величина шага пространственной сетки. Слагаемые с коэффициентом  $\tau$  представляют собой подсеточную диссипацию, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки. Коэффициент  $\alpha$  можно рассматривать как настроечный параметр, определяющий величину подсеточной диссипации.

Выпишем систему (3)–(9) в переменных  $x, y, z$  в форме, удобной для построения численного алгоритма.

Уравнение для плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j_{mx} + \frac{\partial}{\partial y} j_{my} + \frac{\partial}{\partial z} j_{mz} = 0, \quad (14)$$

где

$$j_{mx} = \rho u_x - \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p) - \tau \frac{\partial}{\partial y} \rho u_x u_y - \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_x u_z, \quad (15)$$

$$j_{my} = \rho u_y - \tau \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_y - \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p) - \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_y u_z, \quad (16)$$

$$j_{mz} = \rho u_z - \tau \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_z - \tau \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y u_z - \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2 + p). \quad (17)$$

Уравнение для  $x$ -компоненты импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_x = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx} - j_{mx} u_x - p) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx} - j_{my} u_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zx} - j_{mz} u_x), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} = & \left( \left[ \frac{4}{3} \mu + \zeta \right] + \tau \rho + \tau \rho u_x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} u_x + 2 \tau u_x \frac{\partial}{\partial x} p + \left( -\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \frac{\partial}{\partial y} u_y + \\ & + \tau u_y \frac{\partial}{\partial y} p + \tau \rho u_x u_y \frac{\partial}{\partial y} u_x + \left( -\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \frac{\partial}{\partial z} u_z + \tau u_z \frac{\partial}{\partial z} p + \tau \rho u_x u_z \frac{\partial}{\partial z} u_x, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Pi_{yx} = (\mu + \tau \rho u_y^2) \frac{\partial}{\partial y} u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} u_y + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial}{\partial x} u_x + \tau \rho u_y u_z \frac{\partial}{\partial z} u_x + \tau u_y \frac{\partial}{\partial x} p, \quad (20)$$

$$\Pi_{zx} = (\mu + \tau \rho u_z^2) \frac{\partial}{\partial z} u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} u_z + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial}{\partial x} u_x + \tau \rho u_z u_y \frac{\partial}{\partial y} u_x + \tau u_z \frac{\partial}{\partial x} p. \quad (21)$$

Уравнение для  $y$ -компоненты импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_y = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xy} - j_{mx} u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yy} - j_{my} u_y - p) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zy} - j_{mz} u_y), \quad (22)$$

где

$$\Pi_{xy} = (\mu + \tau \rho u_x^2) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau \rho u_x u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau \rho u_x u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{yy} = & \left( \frac{4}{3} \mu + \zeta + \tau \rho + \tau \rho u_y^2 \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2 \tau u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \left( -\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \left( -\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau \rho u_y u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau u_z \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Pi_{zy} = (\mu + \tau \rho u_z^2) \frac{\partial u_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau \rho u_z u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau u_z \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (25)$$

Уравнение для  $z$ -компоненты импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_z = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xz} - j_{mx} u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yz} - j_{my} u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zz} - j_{mz} u_z - p), \quad (26)$$

где

$$\Pi_{xz} = (\mu + \tau \rho u_x^2) \frac{\partial u_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tau \rho u_x u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau \rho u_x u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (27)$$

$$\Pi_{yz} = (\mu + \tau \rho u_y^2) \frac{\partial u_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau \rho u_y u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau u_y \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{zz} = & \left( \frac{4}{3} \mu + \zeta + \tau \rho + \tau \rho u_z^2 \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2 \tau u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \left( -\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \left( -\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau \rho u_z u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau u_y \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение для полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E = & \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx} u_x + \Pi_{xy} u_y + \Pi_{xz} u_z - j_{mx} H - q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx} u_x + \Pi_{yy} u_y + \\ & + \Pi_{yz} u_z - j_{my} H - q_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zx} u_x + \Pi_{zy} u_y + \Pi_{zz} u_z - j_{mz} H - q_z) \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$H = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad (31)$$

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - u_x R_q, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} - u_y R_q, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} - u_z R_q. \quad (32)$$

$$R_q = \tau \rho \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right\} + \\ + \tau \rho p \left\{ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\}. \quad (33)$$

Компоненты  $\Pi^{ij}$  и  $j_m^i$ , входящие в (30), определены в (15)–(29).

Стационарное ламинарного течения Куэтта является одним из примеров, для которого известно точное решение уравнений Навье–Стокса при любых значениях чисел Маха и Рейнольдса. Это решение для сжимаемого теплопроводного газа было предложено и исследовано Иллингвортом [24]. Следуя [18], покажем, что решение Иллингворта является также точным решением КГД системы (14)–(33).

Аналитическое решение для течения Куэтта может быть построено в предположении, что газодинамические параметры зависят только от нормальной координаты  $y$ :

$$u_x = u_x(y), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad p = p(y), \quad \rho = \rho(y).$$

Предполагая  $p = \rho RT$ , получим  $T = T(y)$ . Подстановка этих выражений в уравнения (14)–(33) приводит к упрощенной форме компонентов:

$$j_{mx} = \rho u_x, \quad j_{my} = -\tau \frac{dp}{dy}, \quad j_{mz} = 0, \\ \Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = 0, \quad \Pi_{xz} = \Pi_{zx} = \Pi_{yz} = \Pi_{zy} = 0, \\ \Pi_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy}, \quad \Pi_{xy} = \mu \frac{du_x}{dy} + \tau u_x \frac{dp}{dy}, \\ R_q = 0, \quad q_x = q_z = 0, \quad q_y = -\kappa \frac{dT}{dy}.$$

Таким образом, уравнения (14), (18), (22), (26) и (33) приводятся к виду

$$\frac{d}{dy} \left( \tau \frac{dp}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du_x}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left( \tau u_x \frac{dp}{dy} \right) = 0, \\ \frac{d}{dy} \left( \mu u_x \frac{du_x}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left( \kappa \frac{dT}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left( \tau H \frac{dp}{dy} \right) = 0, \\ \frac{dp}{dy} = 0.$$

Принимая во внимание последнее уравнение, можно сделать вывод, что давление в потоке является постоянным. Отсюда следует, что все  $\tau$ -слагаемые равны нулю. Таким образом, вышеприведенная система принимает вид

$$\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du_x}{dy} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dy} \left( \mu u_x \frac{du_x}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left( \kappa \frac{dT}{dy} \right) = 0.$$

Эти уравнения совпадают с системой, полученной для стационарного течения Куэтта, исходя из уравнений Навье–Стокса [24]. Таким образом, аналитическое решение системы Навье–Стокса для течения Куэтта является также точным решением КГД системы. Это аналитическое решение было получено в неявном виде для газа максвелловских молекул ( $\omega = 1$ ) и специального вида граничных условий (условие прилипания для скорости, изотермические и адиабатические условия для верхней и нижней стенки, соответственно). Для небольших значений числа Маха, решение Иллинговорта почти совпадает с выражением для случая несжимаемой жидкости (1).

Можно показать, что для течения Пуазейля и многих других известных задач, точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса являются также и точными решениями КГД уравнений [18].

#### 4. Численный алгоритм: общие замечания

Для решения начально-краевой задачи (3)–(33) с начальными условиями (1) and (2) методом конечных разностей, введем в расчетной области равномерную по пространству и по времени сетку:  $\Omega_{xzt} = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z \times \omega_t$ ,  $\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N_x - 1}, x_i = -h/2 + hi\}$ ,  $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y - 1}, y_j = -h/2 + hj\}$ ,  $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N_z - 1}, z_k = -L_z/2 - h/2 + hk\}$ ,  $\omega_t = \{t, n_t = \overline{0, N_t}, t = h_t n_t\}$ . Число шагов по времени  $N_t$  заранее не определено. Границы области располагаются в полуцелых точках.

Алгоритм построения явной по времени разностной схемы такой же, как в работах [21, 25, 26]: пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком, а для производных по времени используется явный метод Эйлера.

Расчет проводился на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [27], при этом используется распараллеливание вычислений, основанное на декомпозиции расчетной области плоскостями  $x = const$ . Такая технология основана на стандарте передачи сообщений MPI и с успехом применялась в работах [21, 25, 26].

Программный комплекс обладает полной переносимостью между платформами, поддерживающими язык Си и стандарт MPI.

Значения расчетных параметров указаны в табл. 2.

Таблица 2

**Параметры расчетов**

$L_x = 0.16$ м	Длина канала
$L_y = 0.08$ м	Расстояние между твердыми стенками (высота канала)
$L_z = 0.08$ м	Ширина канала
$N_x = 162, N_y = 82, N_z = 82$	Размер разностной сетки
$h = 0.001$ м	Шаг разностной сетки
$h_t = \beta h / c_{s0} = 5.936 \cdot 10^{-7}$ с	Шаг по времени
$\beta = 0.2$	Число Куранта
$\tau = \alpha h / c_s$	Релаксационный параметр
$\alpha = 0.1$	Настроечный параметр

Используемый в настоящей работе КГД-алгоритм имеет единственный настроечный параметр  $\alpha$ , определяющий уровень подсеточной диссипации. Влияние этого параметра на численное решение для ламинарных течений и течений, содержащих ударные волны, было исследовано авторами в предыдущих работах. Было показано, что относительно большие значения  $\alpha$  приводят к излишнему сглаживанию решения, в то время как малые значения могут вызывать паразитные колебания в областях больших градиентов параметров.

Для большинства течений, подходящие значения лежат в интервале  $0.05 < \alpha < 0.5$ . Влияние коэффициента  $\alpha$  на моделирование турбулентных течений было исследовано в [21]. На примере вихря Тейлора–Грина было показано, что значение  $\alpha = 0.1$  является оптимальным для моделирования свободных турбулентных течений вдали от стенок. Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют сделать вывод, что для моделирования пристеночных турбулентных течений можно взять такое же значение  $\alpha = 0.1$ .

В настоящей работе проведено моделирование течения Куэтта для трех значений начального числа Рейнольдса  $Re = 3000, 4250$  и  $300$ . За исключением начальных значений плотности и давления (которые

определяют значение  $Re$ ), все параметры расчетов одинаковы для трех случаев. Процедура задания начальных значений параметров газа на основе заданных чисел Маха и Рейнольдса такая же, как в [21].

При  $Re = 3000$  и  $Re = 4250$ , начальное возмущение (2) приводит к развитию турбулентного течения Куэтта. При  $Re = 300$ , начальное возмущение быстро сглаживается за счет вязкой диссипации, и образуется ламинарное течение Куэтта.

В табл. 3 определяются динамические параметры течения

Таблица 3

**Динамические параметры**

$Re = \rho_0(U_0/2)(L_y/2)/\mu_0$	Начальное число Рейнольдса
$Re^m = (\rho^m(U_0/2)(L_y/2)/\mu^m) _{y=0}$	Осредненное число Рейнольдса
$Re_\tau = (\rho^m u_\tau(L_y/2)/\mu^m) _{y=0}$	Динамическое число Рейнольдса
$u_x^m, \mu^m, \rho^m$	Осредненные по времени скорость, динамическая вязкость и плотность
$u_\tau = ((\tau_w/\rho^m)^{1/2}) _{y=0}$	Динамическая скорость
$l_\tau = (\mu^m/(\rho^m u_\tau)) _{y=0}$	Динамическая длина
$\tau_w = (\mu^m(du_x^m/dy)) _{y=0}$	Касательное напряжение на стенке
$u_+ = u_x^m/u_\tau$	Безразмерная скорость
$y_+ = y/l_\tau$	Безразмерная координата
$C_f = 2\tau_w/(\rho^m(U_0/2)^2)$	Коэффициент трения

Здесь  $\mu^m, \rho^m$  являются осредненными по времени значениями  $\mu$  и  $\rho$  в точке  $x = L_x/2, y = 0, z = 0$  (в середине нижней стенки). Величина  $u_x^m$  – это осредненная по времени продольная компонента скорости  $u_x$  в сечении  $x = L_x/2, z = 0$ . Осреднение величин по времени проводится согласно формуле (записанной на примере компоненты скорости  $u_x$ ):

$$u_x^m = \frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 1} \left( \sum_{n_t = n_{t1}}^{n_{t2}} u_x \right). \quad (34)$$

Номера шагов по времени  $n_{t1}$  и  $n_{t2}$  являются границами интервала осреднения. Формула (34) может быть записана в рекуррентном виде, удобном для программной реализации:

$$u_x^m|_{n_{t2}+1} = \frac{n_{t2} - n_{t1} + 1}{n_{t2} - n_{t1} + 2} u_x^m|_{n_{t2}} + \frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 2} u_x^m|_{n_{t2}+1}. \quad (35)$$

Здесь значение средней скорости на шаге  $n_{t2} + 1$  вычисляется через значение средней скорости на предыдущем шаге  $n_{t2}$ .

Для случаев  $Re = 3000$  и  $Re = 4250$  осреднение проводится от  $n_{t1} = 3 \cdot 10^5$  до  $n_{t2} = 8 \cdot 10^5$ . Отметим, что полное число шагов по времени  $n_{t2} = 8 \cdot 10^5$  соответствует  $t = 0.475$  с и требует около 160 часов машинного времени при использовании 32-х процессоров кластера К-100 (Intel Xeon X5670) [27]. Время осреднения  $T^m = h_t(n_{t2} - n_{t1}) = 0.297$  с можно выразить через полувысоту канала  $L_y / 2$  и осевую скорость течения  $U_0 / 2$ :  $T^m = 625((L_y / 2) / (U_0 / 2))$ .

Диссипация энергии начальных условий (2) приводит к повышению температуры газа относительно начальной  $T_0$ . При этом в турбулентном течении температура максимальна вблизи стенок, а в ламинарном температура практически постоянна в расчетной области. Поскольку вязкость газа зависит от температуры согласно (11), в установившемся течении вязкость также превышает начальное значение  $\mu_0$ .

Для учета этого эффекта мы вводим осредненное число Рейнольдса  $Re^m$ , вычисляемое на основе осредненных значений  $\mu^m$  и  $\rho^m$ . Значение  $Re^m$  оказывается несколько меньшим начального  $Re$ . Значения динамических параметров, полученных в расчетах, указаны в табл. 4. Отметим, что общепринятые модели для вязких несжимаемых течений не учитывают нагревание за счёт диссипации кинетической энергии.

Таблица 4

**Значения динамических параметров в настоящей работе**

Режим	Re	Re <sup>m</sup>	Re <sub>τ</sub>	C <sub>f</sub>
Ламинарный	300	286	17	0.007
Турбулентный	3000	2804	153	0.0059
Турбулентный	4250	3994	198	0.0049

Кинетическая энергия газа в расчетной области определяется формулой

$$E_{kin}(t) = \sum_{i=1}^{N_x-2} \sum_{j=1}^{N_y-2} \sum_{k=1}^{N_z-2} \frac{1}{2} \rho_{ijk}(t) (u_{xijk}^2(t) + u_{yijk}^2(t) + u_{zijk}^2(t)) \cdot h^3, \quad (36)$$

где суммирование проводится по точкам пространственной сетки.

## 5. Результаты расчетов для $Re = 3000$

На рис. 2 показана зависимость кинетической энергии газа в расчетной области (36) от текущего числа шагов по времени  $n_t$  (при этом  $t = h_t n_t$ ). После  $n_t = 2 \cdot 10^5$  устанавливается турбулентный режим, и профиль кинетической энергии становится квазипериодическим.

На рис. 3 представлен вычисленный профиль осредненной по времени продольной компоненты скорости  $u_x^m$  в зависимости от координаты  $y$  (кривая 1). Скорость  $u_x^m$  нормирована на скорость стенки  $U_0$ , координата  $y$  нормирована на высоту канала  $L_y$ .

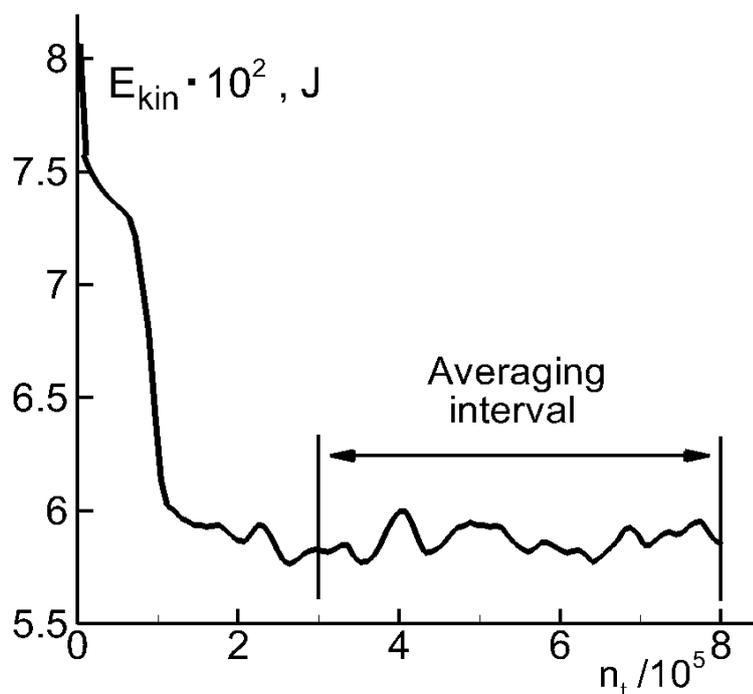


Рис. 2. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для  $Re = 3000$ .

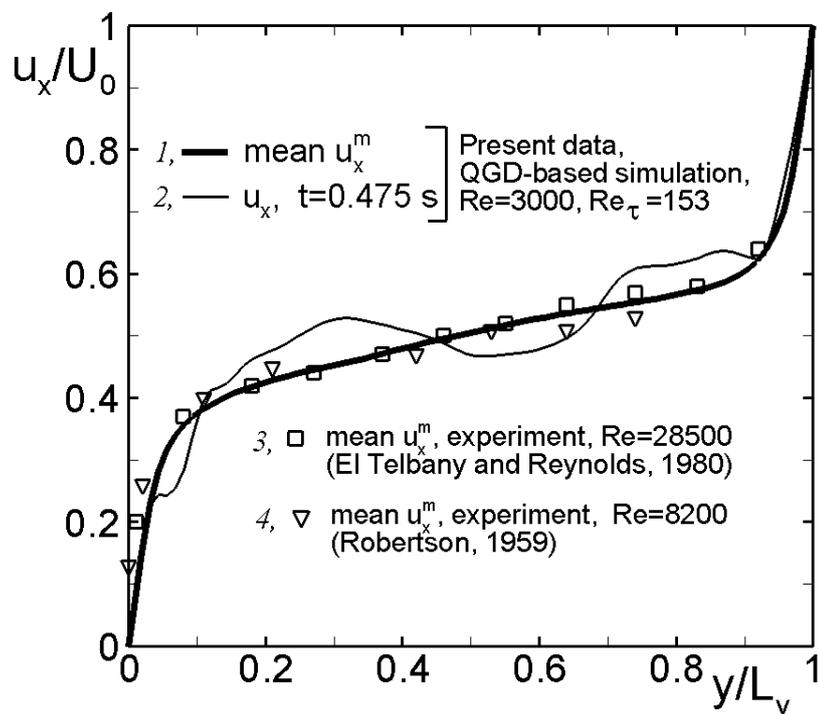


Рис. 3. Распределение продольной компоненты скорости

На рис. 3 экспериментальные профили средней продольной скорости в течении Куэтта при  $Re=28500$ [7, 11] и  $Re=8200$ [6, 11] обозначены символами 3, 4, соответственно. Результаты для различных чисел Рейнольдса мало отличаются друг от друга. Видно, что моделирование на основе КГД алгоритма хорошо передает характерный профиль средней скорости в течении Куэтта.

Кроме профиля средней скорости  $u_x^m$ , на рис. 3 приведен график мгновенной скорости  $u_x$  (кривая 2) в момент времени  $t=0.475$ с. В то время как профиль средней скорости имеет характерный вид для турбулентного течения в канале, мгновенная скорость испытывает случайные колебания. Характер этих колебаний описан ниже (рис. 5–7).

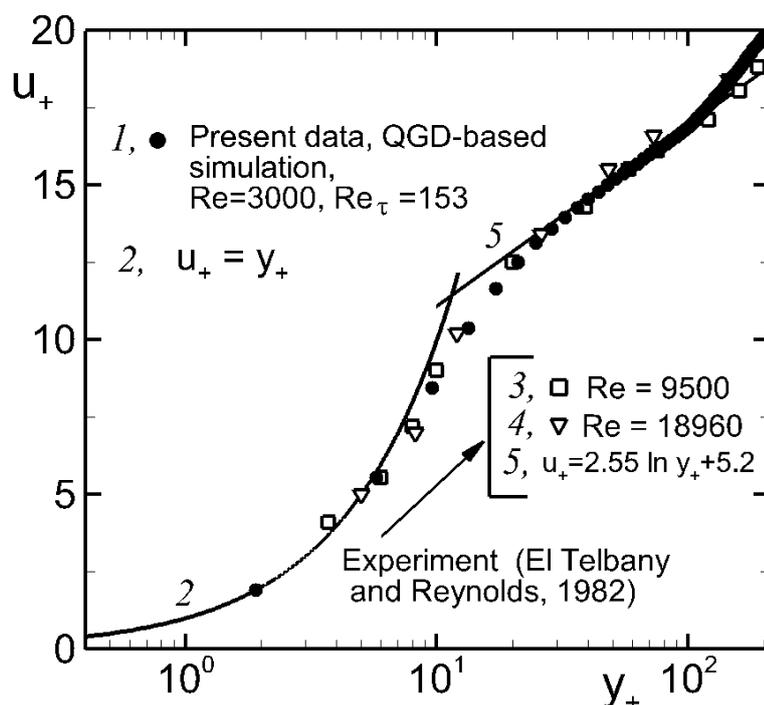


Рис. 4. Распределение осредненной продольной компоненты скорости в безразмерных переменных

На рис. 4 показан вычисленный профиль средней скорости  $u_x^m$  в безразмерных переменных (символы 1), а также данные, полученные при экспериментальном исследовании течения Куэтта [10]. Данные для  $Re = 9500$  и  $Re = 18960$  обозначены символами 3 и 4 соответственно. Как видно, данные расчета по КГД алгоритму и экспериментальные значения для разных чисел Рейнольдса почти не отличаются. Здесь и далее расположение символов 1 соответствует расчетной сетке КГД алгоритма.

Согласно двухслойной модели пристеночной турбулентности, профиль средней скорости в вязком подслое  $y_+ < 5$  является линейным:  $u_+ = y_+$  (кривая 2), а при  $y_+ > 11$  – логарифмическим:  $u_+ = A \ln y_+ + B$  (прямая 5). В работе [10] получены следующие значения постоянных:  $A = 2.55$ ,  $B = 5.2$ . На рис. 4 видно, что в интервале  $30 < y_+ < 100$  результаты моделирования на основе КГД-модели практически совпадают с прямой  $u_+ = 2.55 \ln y_+ + 5.2$ . Таким образом, результаты расчета по КГД алгоритму очень хорошо описывают особенности пристеночной турбулентности. Прямая  $u_+ = 2.55 \ln y_+ + 5.2$  также хорошо соответствует результатам численного моделирования течения Куэтта, проведенного в [11].

В работах, посвященных исследованию турбулентного течения Куэтта, получены различные значения постоянных  $A$  и  $B$ . Так, результаты численного моделирования из [14] показывают заниженное значение  $A=2.44$  по сравнению  $A=2.55$  из [10], при этом  $B=5.2$ , как и в [10]. Значения  $A=2.44$  и  $B=5.0$  из [4, 15],  $A=2.44$  и  $B=5.1$  из [16] несколько ниже по сравнению со значениями из [10]. Что касается экспериментальных работ, авторы [12] находят  $A=2.55$  и  $B=4.7$ , в то время как в [13] получены  $A=2.50$  и  $B=5.5$  для  $Re_\tau \approx 200$ .

На рис. 4 видно, что результаты расчета по КГД алгоритму соответствуют экспериментальным данным из [10] не только на линейном ( $y_+ < 7$ ) и логарифмическом ( $y_+ > 12$ ) участках, но и в переходной зоне  $7 < y_+ < 12$ .

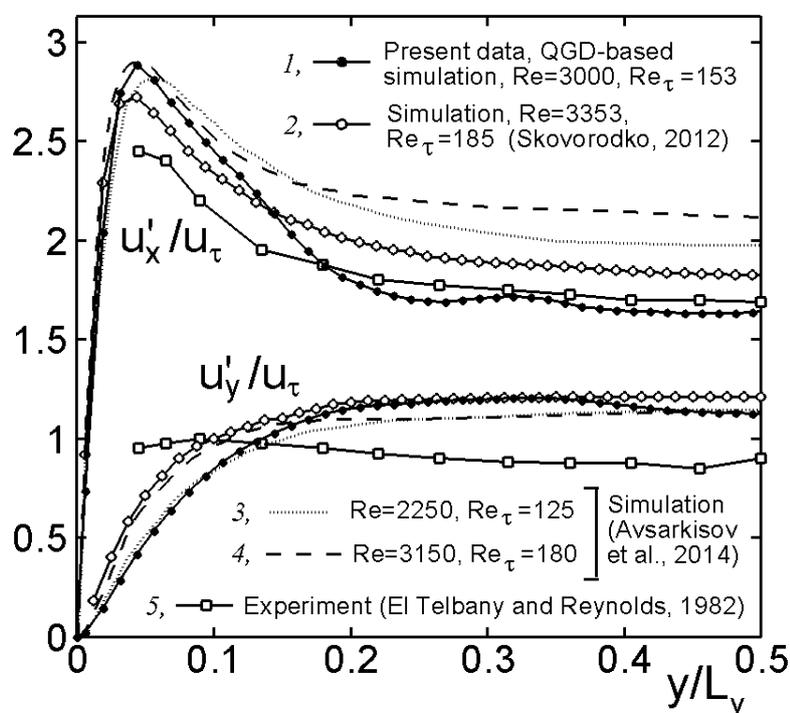


Рис. 5. Распределение среднеквадратичных пульсаций  $u'_x$  и  $u'_y$

На рис. 5 приведены профили среднеквадратичных пульсаций компонент скорости  $u'_x$  и  $u'_y$  в зависимости от координаты  $y$ , нормированной на  $L_y$ . Символами 1 обозначены данные настоящей работы. Пульсации  $u'_x$  вычисляются по формуле

$$u'_x = \left[ \frac{1}{n_{i2} - n_{i1} + 1} \left( \sum_{n_i = n_{i1}}^{n_{i2}} u_x^2 \right) - (u_x^m)^2 \right]^{1/2} \quad (37)$$

и нормируются на динамическую скорость  $u_\tau$ . Значения пульсаций  $u'_y$  и  $u'_z$  определяются аналогично.

Для сравнения на рис. 5 приведены значения среднеквадратичных пульсаций, полученные в [15] и [16] при моделировании течения Куэтта при близких значениях  $Re$  и  $Re_\tau$  (символы 2–4), а также экспериментальные значения пульсаций из [10] (символы 5).

Максимальные значения  $u'_x$ , полученные экспериментально в [13] для течения Куэтта при числах Рейнольдса от 2500 до 5000, лежат в диапазоне 2.8–2.9. Эти значения очень близки к полученному в настоящей работе максимальному значению  $u'_x$  при  $Re = 3000$  (2.89) и к результатам численного моделирования при  $Re = 3150$  [16]. В экспериментах [10] максимальное значение  $u'_x$  оказывается равным 2.75 (рис. 7) и не зависит от числа Рейнольдса.

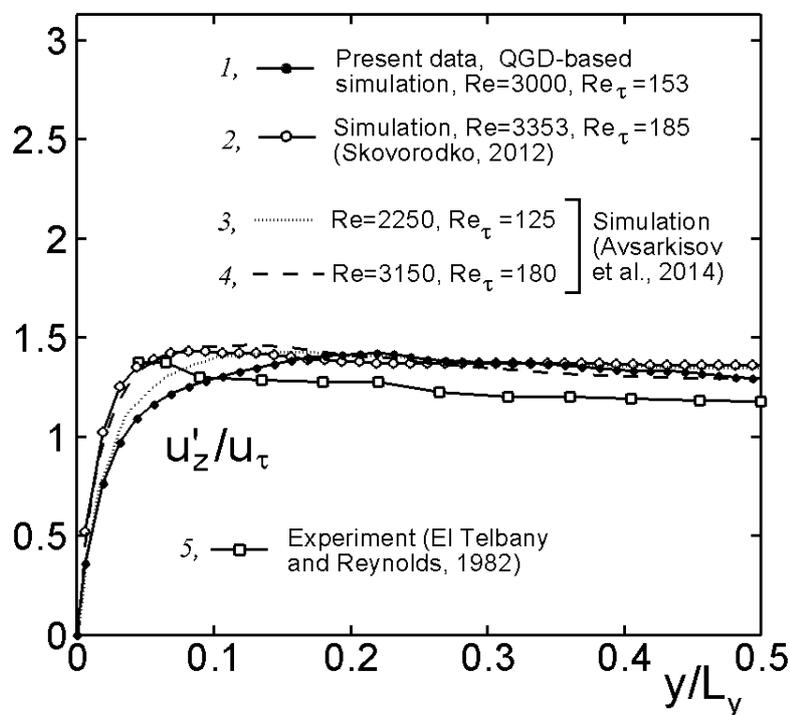


Рис. 6. Распределение среднеквадратичных пульсаций  $u'_z$

Рис. 6 изображает значения среднеквадратичных пульсаций  $u'_z$ . Обозначения такие же, как и на рис. 5. Данные  $u'_z$  расчетов и эксперимента находятся в хорошем согласии.

На рис. 7 значения пульсаций  $u'_x$ , вычисленных в настоящей работе (символы 1) и полученных экспериментально (символы 2, 3, 4), изображены в зависимости от безразмерной координаты  $y_+$ . Символы 2 объединяют данные из [10] для чисел Рейнольдса в диапазоне 9500–18960. Данные из [9] для  $Re=13800$  и данные из [8] для  $Re=15200$  обозначены символами 3 и 4, соответственно.

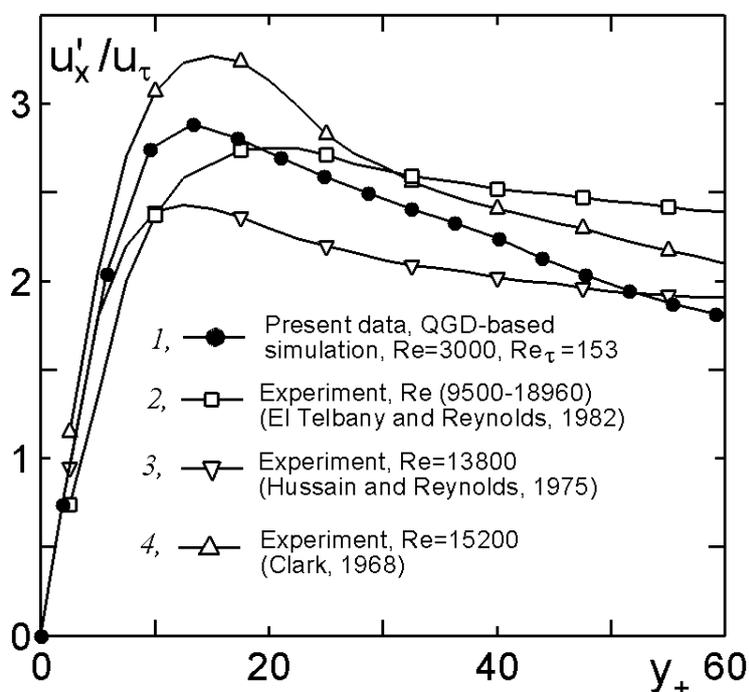


Рис. 7. Распределение среднеквадратичных пульсаций  $u'_x$  в зависимости от безразмерной координаты

Видно, что экспериментальные данные заметно различаются, при этом не наблюдается зависимости от числа Рейнольдса. С учетом разброса данных экспериментов, результаты моделирования на основе КГД алгоритма разумно соответствуют экспериментальным результатам.

В настоящей работе используется весьма грубая равномерная пространственная сетка. Для  $Re=3000$  первые пять от стенки расчетных точек имеют координаты  $y_+ = 0, 1.91, 5.73, 9.54, 13.36$ . В [3] для расчётов пристеночной турбулентности методом DNS

рекомендовано, чтобы минимальное значение шага составляло  $\Delta y_+ = 1$  и число точек в области  $0 < y_+ < 10$  было не меньше 3. Видно, что в настоящей работе удовлетворяется только второе условие. Несмотря на большую величину шага  $\Delta y_+ = 1.91$ , результаты моделирования на основе КГД-алгоритма хорошо соответствуют экспериментальным данным для течения Куэтта.

Для проверки зависимости численного решения от шага пространственной сетки, было проведено моделирование для  $Re = 3000$  с использованием загрубленной сетки (пространственный шаг  $h = 0.00125$  м и размер  $N_x = 130$ ,  $N_y = 66$ ,  $N_z = 66$ ). Полученные результаты практически совпадают с данными, представленными на рис. 4, при этом  $\Delta y_+ = 2.26$ . При расчетах на еще более грубых сетках, турбулентное течение не формируется.

Отметим, что в большинстве работ по прямому численному моделированию турбулентных течений в каналах используется намного более подробная пространственная сетка. Например, вязкий подслой содержит 11 точек сетки в работе [28], и 7 точек в работе [22]. Таким образом, для достижения результатов, сравнимых с данными прямого численного моделирования, в случае использования КГД алгоритма, можно выбирать пространственную сетку в 3–5 раз грубее.

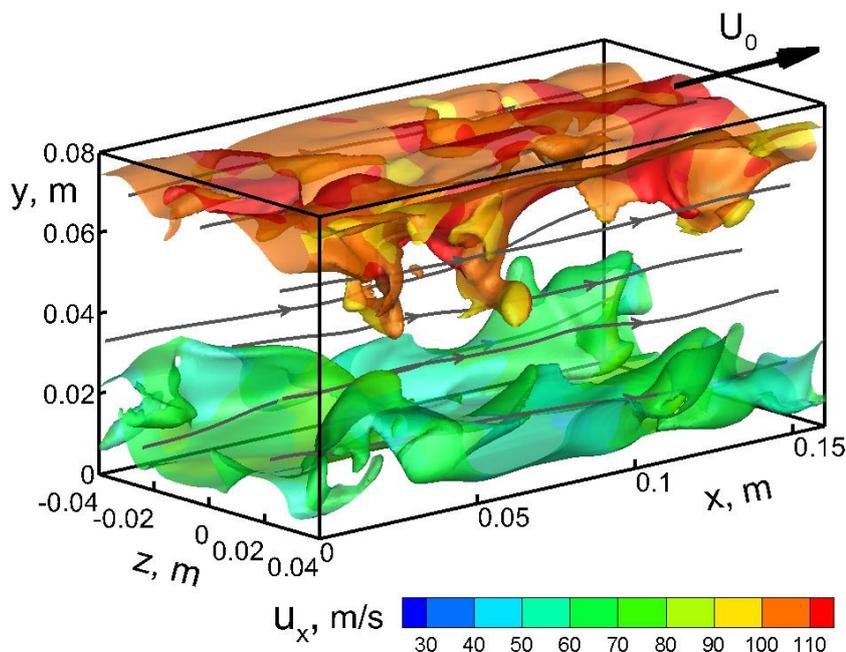


Рис. 8. Изоповерхности температуры и контуры продольной скорости

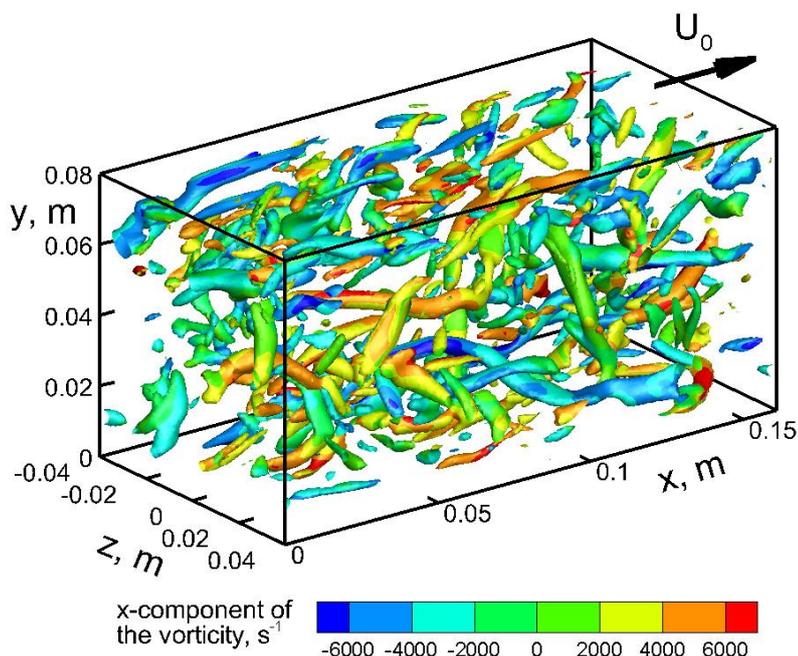


Рис. 9. Изоповерхности Q-критерия и контуры  $x$ -компоненты завихренности

На рис. 8 изображены поверхности уровня температуры  $T = 299.7$  К в расчетной области. Заметно повышение температуры от начального значения  $T_0 = 273$  К, а также волнообразный характер распределения температуры. На поверхности уровня температуры нанесены контуры мгновенной продольной скорости  $u_x$ . Кроме того, на рис. 8 изображены пространственные линии тока. Поскольку турбулентное течение имеет вихревой характер, пространственные линии тока не являются прямыми.

На рис. 9 показаны поверхности уровня Q-критерия:  $Q = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/2$ , где  $S_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)/2$  и  $\Omega_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)/2$  являются симметричными и антисимметричными частями тензора градиентов скоростей. Известно, что эти изоповерхности характеризуют когерентные вихревые структуры в поле течения [2, 29, 30]. На поверхности уровня Q-критерия нанесены контуры  $x$ -компоненты завихренности  $V_x = \partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z$ . Можно видеть многочисленные вихри, что является обычным для турбулентных газодинамических течений.

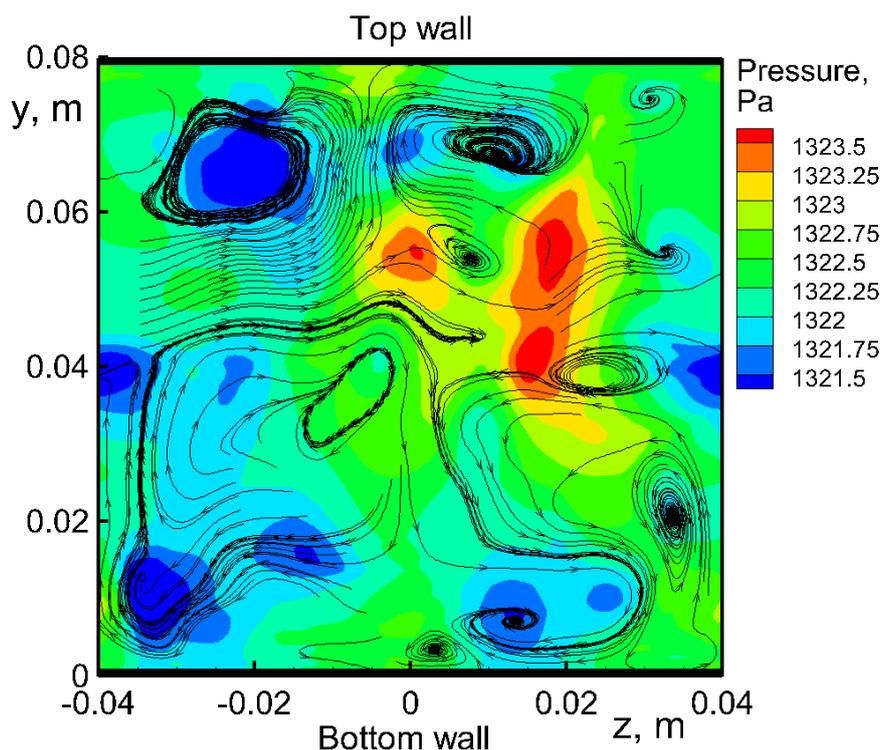


Рис. 10. Контуры давления и линии тока поперечных компонент скорости в сечении  $x=0.08$

На рис. 10 изображены контуры давления в сечении  $x=0.08$ , а также линии тока поперечных компонент скорости  $u_y$ ,  $u_z$  в этом же сечении. Хорошо заметна вихревая структура турбулентного потока. Можно увидеть пространственную корреляцию между областями пониженного давления и расположением вихрей.

## 6. Результаты расчетов для $Re = 4250$

Моделирование на основе КГД-алгоритма для  $Re = 4250$  проводилось так же, как и для  $Re = 3000$ , и изменением начальных значений плотности и давления. На рис. 11 изображен профиль продольной компоненты скорости. Обозначения и экспериментальные данные такие же, как на рис. 3. Вид профиля усредненной скорости для  $Re = 4250$  мало отличается от профиля для  $Re = 3000$  (рис. 3) и так же хорошо соответствует экспериментальным значениям.

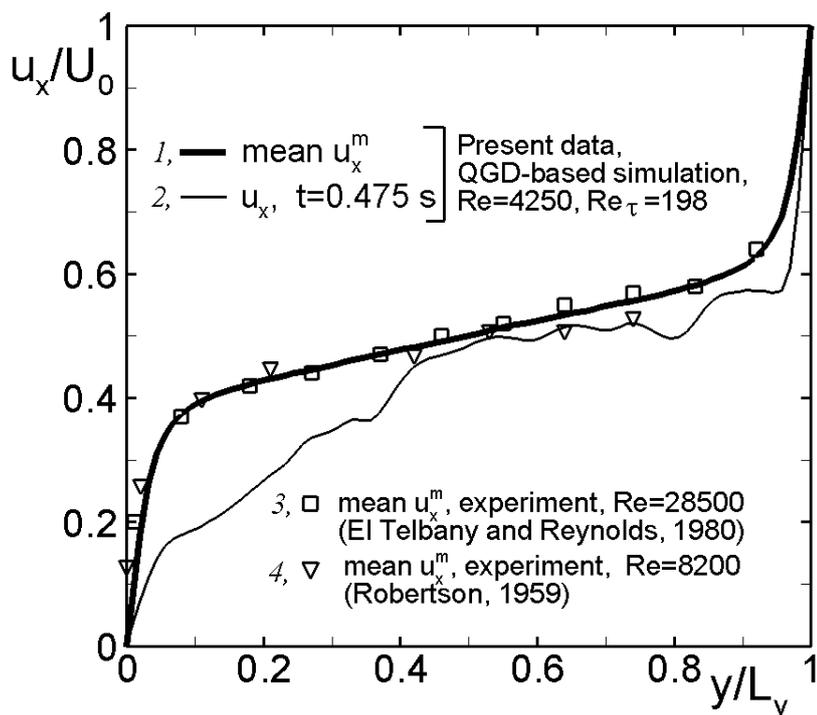


Рис. 11. Распределение продольной компоненты скорости

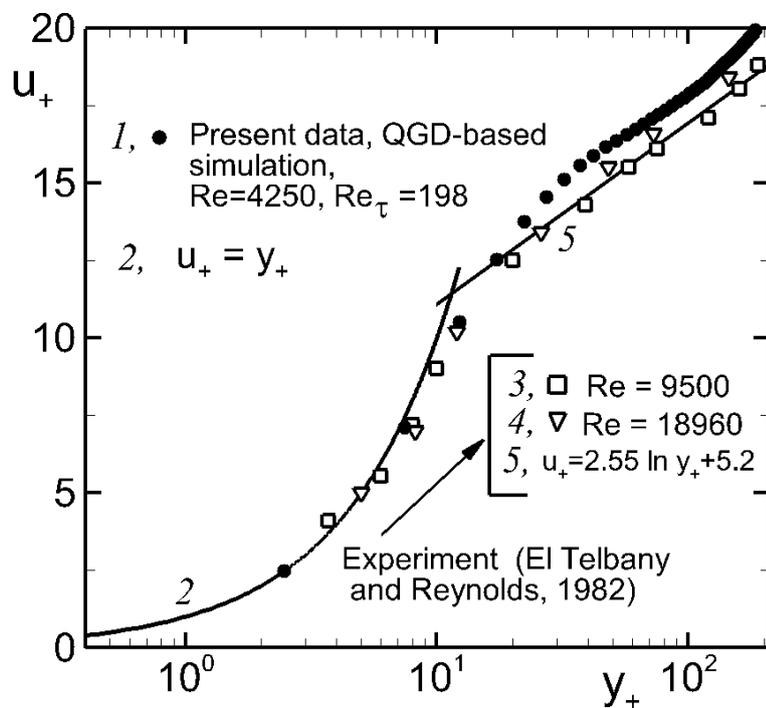


Рис. 12. Распределение продольной компоненты скорости в безразмерных переменных

Детальный анализ распределения осредненной продольной скорости для  $Re = 4250$  (рис. 12, обозначения соответствуют рис. 4) показывает несколько завышенные значения скорости по сравнению с данными экспериментов, а также по сравнению с результатами моделирования для  $Re = 3000$  (рис. 4).

Такое несоответствие, возможно, возникает из-за слишком грубой расчетной сетки вблизи стенки. Для  $Re = 4250$  первые четыре от стенки расчетные точки имеют координаты  $y_+ = 0, 2.47, 7.41, 12.36$ . Таким образом, конфигурация пространственной сетки не соответствует критериям из [3]. Тем не менее, результаты моделирования с использованием даже такой грубой сетки демонстрируют качественное согласие с экспериментальными данными. Для моделирования течений при больших числах Рейнольдса шаг пространственной сетки необходимо уменьшать.

## 7. Результаты расчетов для $Re = 300$

При  $Re = 300$  течение Куэтта является ламинарным (рис. 5 из [10]). КГД алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как ламинарных, так и турбулентных режимов течения, как было показано в [21]. При этом не требуется менять какие-либо параметры алгоритма, достаточно изменить только начальное число Рейнольдса.

В данной работе подтверждено это преимущество КГД алгоритма в применении к пристеночной турбулентности.

А именно, моделирование при  $Re = 300$  приводит к диссипации начального возмущения (1)–(2) и к установлению ламинарного режима течения Куэтта. Соответствующая зависимость кинетической энергии от текущего числа шагов по времени показана на рис. 13.

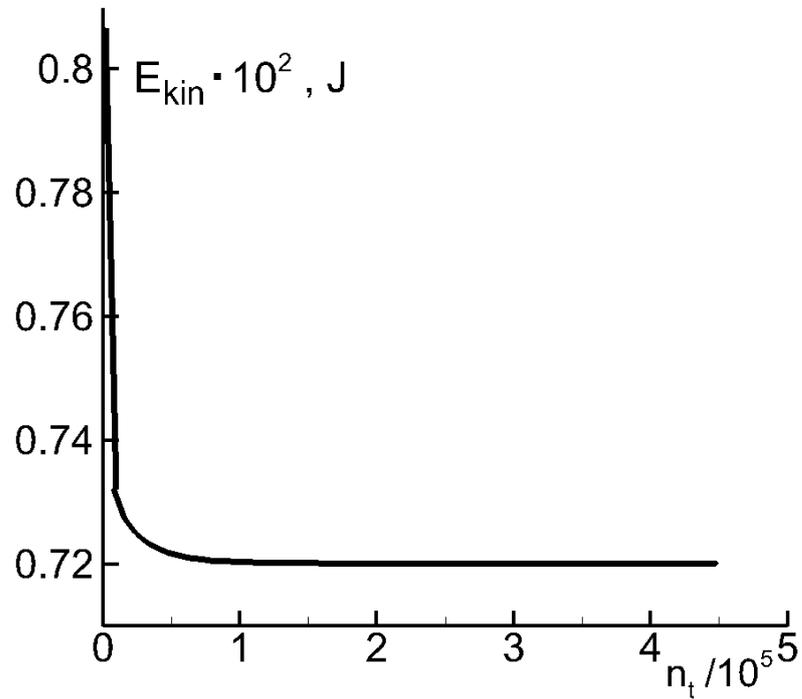


Рис. 13. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для  $Re = 300$

Из рис. 13 видно, что при  $Re = 300$  кинетическая энергия газа в расчетной области становится постоянной при  $n_t > 1.5 \cdot 10^5$ . Профиль продольной скорости  $u_x$  при этом становится линейным, как и в начальный момент времени (1). Начальное возмущение (2) практически полностью исчезает, так что поперечные компоненты скорости не превышают  $10^{-4}$  м/с. Диссипация энергии начальных условий приводит к повышению температуры газа в области до 292 К.

Отметим, что одно и то же значение настроечного параметра КГД алгоритма  $\alpha = 0.1$  применимо к ламинарным и турбулентным режимам течений как вдали от твердых стенок (вихрь Тейлора–Грина), так и в пристеночной области (течение Куэтта).

Адекватное численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задаче о течении за обратным уступом в плоском канале для двумерного случая обеспечивалось при  $0.05 < \alpha \leq 0.3$  [31], [32].

## 8. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса

В ламинарном течении Куэтта коэффициент трения  $C_f$  (определяется в табл. 3) выражается формулой

$$C_f = 2/Re^m. \quad (38)$$

Выражение (38) легко получить из линейного распределения продольной компоненты скорости в ламинарном течении (1) и определения осредненного числа Рейнольдса  $Re^m$  (табл. 3).

В случае турбулентного течения Куэтта коэффициент трения может быть аппроксимирован следующим образом [6, 10]:

$$\sqrt{C_f/2} = G/\log_{10} Re^m. \quad (39)$$

Отметим, что в настоящей работе зависимости (38) и (39) записаны с помощью осредненного числа Рейнольдса  $Re^m$  вместо начального  $Re$ . Выражение  $Re^m$  учитывает увеличение динамической вязкости вследствие повышения температуры в процессе диссипации энергии начального возмущения в сжимаемом течении. Значения чисел Рейнольдса и коэффициента трения для трех вариантов моделирования на основе КГД алгоритма приведены в табл. 4.

Значения постоянной  $G$  в (39) несколько различается в разных работах. В [8] получено  $G = 0.19$ , в [10]  $G = 0.182$ .

На рис. 14 показаны зависимости (38) (кривая 1) и (39) (кривая 2) для  $G = 0.182$ , а также данные расчетов настоящей работы из табл. 4 (символы 3). Видно, что значение  $G = 0.182$  из работы [10] хорошо соответствует результатам настоящей работы. Отметим, что экспериментальные данные исследований течения Куэтта в различных постановках имеют заметный разброс относительно зависимости (39) (рис. 5 из [10]).

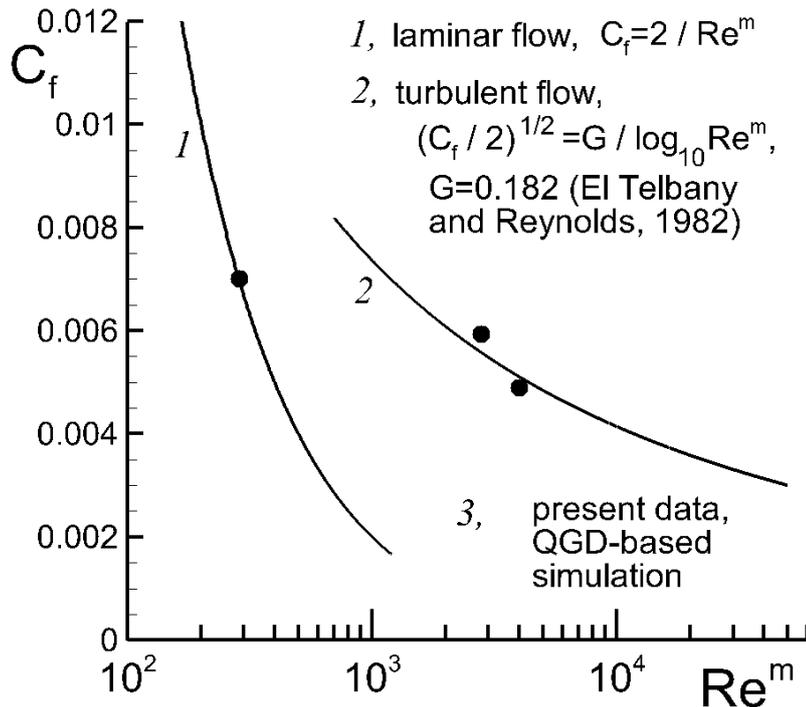


Рис. 14. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса

## 9. Выводы

В настоящей работе впервые демонстрируются возможности КГД алгоритма для моделирования пристеночных турбулентных течений. Для этого проведено моделирование турбулентного ( $Re = 3000$  и  $4250$ ,  $Re_\tau = 153$  and  $198$ ) и ламинарного ( $Re = 300$ ) дозвукового течения Куэтта в азоте.

Было показано, что с помощью КГД алгоритма адекватно воспроизводится пристеночный профиль скорости, при этом число точек в пограничном слое меньше, чем при использовании DNS методов высокого порядка. А именно, для  $Re_\tau = 153$  шаг равномерной сетки составлял  $\Delta y_+ = 1.91$  и в вязком подслое находилось 3 расчетных точки.

Исходя из практики расчетов и рекомендации [3], шаг пространственной сетки в нормальном к стенке направлении должен быть меньше  $\Delta y_+ = 1$  вблизи стенки, и число расчетных точек в вязком подслое не должно быть меньше 7. Несмотря на это, значения продольной скорости, полученные при использовании КГД алгоритма, почти совпадают с экспериментальными данными из [10] и данными расчетов из [11].

Распределение пульсаций продольной скорости показывает лучшее согласие с экспериментом, чем данные DNS из [15, 16]. Пульсации нормальной и поперечной скорости совпадают с данными из [15, 16].

Поверхности уровня Q-критерия показывают вихревой характер турбулентного течения во всей расчетной области.

КГД алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как турбулентных, так и ламинарных пристеночных течений. Ламинарно-турбулентный переход реализуется путем изменения числа Рейнольдса, при этом модификация алгоритма не требуется.

Исходя из полученных результатов, а также результатов моделирования вихря Тейлора–Грина из [21], можно сделать вывод, что КГД алгоритм является весьма перспективным для моделирования как ламинарных, так и турбулентных течений при умеренных числах Рейнольдса, как вдали от стенок, так и пристеночных. Кроме того, КГД алгоритм описывает течения, содержащие ударные волны, и эффективен при распараллеливании. Таким образом, КГД алгоритм может быть использован при моделировании взаимодействия ударных волн с турбулентными потоками, в том числе пристеночными.

### **Благодарности**

Мы признательны В.Г. Приймаку и П.А. Сковородко за ценное обсуждение вопросов моделирования пристеночной турбулентности.

### **Финансирование**

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект РФФИ 13-01-00703-а.

### **Литература**

- [1] H. Schlichting, *Boundary-layer theory*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [2] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Springer, 2008.
- [3] P. Sagaut, *Theoretical background: large-eddy simulation*. In: C. Wagner, T. Huttli, P. Sagaut, editors. *Large-eddy simulation for acoustics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007, pp. 89–127.
- [4] S. Pirozzoli, M. Bernardini and P. Orlandi, *Turbulence statistics in Couette flow at high Reynolds number*, *J. Fluid Mech.*, vol. 758, (2014), pp. 327–343.
- [5] K. N. Volkov, *Formulation of wall boundary conditions in turbulent flow computations on unstructured meshes*, *Comput. Math. Math. Phys.* 54 (2) (2014), pp. 353–367.
- [6] J.M. Robertson, *On turbulent plane Couette flow*, *Proc. 6th Midwestern Conf. Fluid Mech.*, Univ. Texas, Austin (1959), pp. 169–182.

- [7] M.M.M. El Telbany and A.J. Reynolds, *Velocity distributions in plane turbulent channel flows*, J. Fluid Mech. 100 part 1 (1980), pp. 1–29.
- [8] J.A. Clark, *A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow*, J. of Basic Engineering, 90 (1968), p. 455.
- [9] A. K. M. F. Hussain and W.C. Reynolds, *Measurements in fully developed turbulent channel flow*, J. of Fluids Engineering. 97 (1975), pp. 568–578.
- [10] M.M.M. El Telbany and A.J. Reynolds, *The structure of turbulent plane Couette flow*, J. of Fluids Engineering, 104 (1982), pp. 367–372.
- [11] B.L. Rozhdestvenskii, I.N. Simakin, and M.I. Stoinov, *Modeling turbulent Couette flow in a plane channel*, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 30 (2) (1989), pp. 223–229.
- [12] K. Bech, N. Tillmark, P. Alfredsson, and H. Andersson, *An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., vol. 286, (1995), pp. 291–325.
- [13] O. Kitoh, K. Nakabayashi, and F. Nishimura, *Experimental study on mean velocity and turbulence characteristics of plane Couette flow: low-Reynolds-number effects and large longitudinal vortical structure*, J. Fluid Mech., vol. 539, (2005), pp. 199–227.
- [14] T. Tsukahara, H. Kawamura, and K. Shingai, *DNS of turbulent Couette flow with emphasis on the large-scale structure in the core region*, J. of Turbulence, vol. 7, no. 19 (2006).
- [15] P. A. Skovorodko, *Slip effects in compressible turbulent channel flow*, 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 2012. AIP Conf. Proc. 1501 (2012), pp. 457–464.
- [16] V. Avsarkisov, S. Hoyas, M. Oberlack and J. P. Garcia-Galache, *Turbulent plane Couette flow at moderately high Reynolds number*, J. Fluid Mech., vol. 751, (2014), R1.
- [17] B.N. Chetverushkin, *Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations*, CIMNE, Barselona, 2008.
- [18] Yu.V. Sheretov, *Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging. SPC Regular and Chaotic Dynamics*, Moscow-Izhevsk, 2009, in Russian.

- [19] T.G. Elizarova, *Quasi-Gas Dynamic Equations*, Springer, Dordrecht, 2009. ISBN 978-3-642-0029-5.
- [20] M.V. Popov, T.G. Elizarova, *Smoothed MHD equations for numerical simulations of ideal quasi-neutral gas dynamic flows*, Computer Physics Communications, vol. 196 (2015), pp. 348–361.
- [21] I. A. Shirokov and T. G. Elizarova, *Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow basing on quasi-gas dynamic equations*, J. of Turbulence, 15, Issue 10 (2014), pp. 707–730.
- [22] V. G. Priimak, *Direct numerical simulation of spatially localized structures and wave motions in turbulent shear flows: Numerical requirements*, Mat. Model. 20 (12) (2008), pp. 27–43.
- [23] G.A. Bird, *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [24] H.W. Liepmann, A Roshko, *Elements of gasdynamics*, California Institute of Technology, John Willey and Sons, New York, 1957.
- [25] T.G. Elizarova and I.A. Shirokov, *Numerical simulation of a nonstationary flow in the vicinity of a hypersonic vehicle*, Math. Model Comput. Simul. 4 (4) (2012), pp. 410–418.
- [26] T.G. Elizarova and I.A. Shirokov, *Direct simulation of laminar-turbulent transition in a viscous compressible gas layer*, Comput. Math. Model. 25 (1) (2012), pp. 27–48.
- [27] K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.htm>
- [28] J. Kim, P. Moin, and R. Moser, *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number*. *J. Fluid Mech*, 177 (1987), pp. 133–166.
- [29] J. Jeong and F. Hussain, *On the identification of a vortex*, J. Fluid Mech. 285 (1995), pp. 69–94.
- [30] J. Fang, Y. Yao, Z. Li, and L. Lu, *Investigation of low-dissipation monotonicity-preserving scheme for direct numerical simulation of compressible turbulent flows*, Computers & Fluids. 104 (2014), pp. 55–72.

[31] T. G. Elizarova and P. N. Nikolskii, *Numerical simulation of the laminar–turbulent transition in the flow over a backward-facing step*, Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. 3: Fiz. Astron., No. 4, (2007), pp. 14–17.

[32] T.G. Elizarova, P.N. Nikolskii, and J.C. Lengrand, *A New Variant of Subgrid Dissipation for LES Method and Simulation of Laminar-Turbulent Transition in Subsonic Gas Flows*, in *Advances in Hybrid RANS-LES Modeling*, Shia-Hui Peng and Werner Haase, eds., Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. 289–298.