

УДК 519.6

## **Моделирование ударно-волновых структур на начальном участке недорасширенной сверхзвуковой струи**

**И.А. Широков<sup>1</sup>, Т.Г. Елизарова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

<sup>2</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

E-mail: [ivanshirokov@inbox.ru](mailto:ivanshirokov@inbox.ru)

Выполнено моделирование сверхзвуковой недорасширенной воздушной струи с применением квазигазодинамического алгоритма. Исследован процесс развития струйного течения во времени и формирования областей нестационарного течения. Получено хорошее качественное и количественное соответствие результатов экспериментальным и расчетным данным, известным из литературы. Показано, что квазигазодинамический алгоритм позволяет изучать структуру ударно-волновых областей в ближней зоне течения, а также описывать общий характер струйного течения.

**Ключевые слова:** квазигазодинамические (КГД) уравнения, струйное течение, ударно-волновые структуры.

### **Введение**

Исследование струйных течений газа имеет большое значение для перспективных разработок в области двигателестроения. Экспериментальное изучение струй широко распространено, но связано со значительными затратами, и его реализация возможна не для всех задач, интересных с практической точки зрения. В связи с этим, разработка и валидация методов компьютерного моделирования струйных течений представляется важной задачей.

В работах [1, 2] были представлены экспериментальные результаты, полученные в лабораторных условиях при исследовании истечения воздушных струй с различными параметрами в область неподвижного воздуха при нормальных условиях. Приведенные в этих работах осевые профили давления и числа Маха могут служить эталонными данными при валидации методов компьютерного моделирования. При этом в экспериментах наблюдается порядка десяти ударно-волновых структур («бочек»), возникающих при струйных течениях на нерасчетных режимах (когда давление на срезе сопла не совпадает с внешним давлением). Сложность численного моделирования подобных течений заключается в том, что разностные алгоритмы часто не позволяют в сильно нестационарном течении разрешить наблюдаемое в эксперименте число «бочек».

Работы [3, 4] также посвящались экспериментальным исследованиям околозвуковых и сверхзвуковых недорасширенных воздушных струй. При этом изучались и визуализировались трехмерные распределения плотности [3], температуры и средней скорости [4]. Параметры струй, исследованных авторами в [3, 4], отличаются от таковых в работах [1, 2]. В частности, в работе [4], в отличие от [1–3], использовался подогрев струй.

Существует большое число работ, посвященных численному моделированию струйных течений с использованием разнообразных вычислительных подходов, полный обзор которых не представляется возможным. Некоторые из них приведены в списке литературы (см., например, [5–7]). Тем не менее, анализ известных публикаций показывает, что имеющиеся алгоритмы не позволяют получать в расчетах большое число «бочек», которое наблюдается в ряде экспериментов. Причиной тому является ряд факторов: слишком большая или неадекватная схемная вязкость, наличие нестационарных или турбулентных эффектов в струе, моделирование которых требует тонкой настройки применяемых в расчете моделей турбулентности либо аккуратного моделирования нестационарного поведения всей струи в целом.

В работе [5] проводилось моделирование сверхзвуковой струи на основе данных эксперимента [1], послужившего основой для постановки задачи и в настоящей работе. Авторы [5] использовали метод Годунова повышенного порядка для решения осредненных уравнений Навье–Стокса совместно с различными моделями турбулентности. Было получено, что осевые профили давления в ближней зоне (первые 4–5 «бочек») хорошо соответствуют экспериментальным профилям (хотя амплитуда колебаний профиля меньше экспериментальной амплитуды даже в первых «бочках»), а на удалении от сопла и амплитуда, и частота демонстрируют значения заметно меньше экспериментальных. В работе [6] (см. страницу 104) также проводилось моделирование недорасширенной струи путем решения осредненных уравнений Навье–Стокса совместно с моделями турбулентности SST и SA, затем результаты сравнивались с экспериментальными данными [1]. Полученные результаты в целом соответствовали результатам расчетов [5] и экспериментальным данным. Таким образом, специальная настройка моделей турбулентности позволила добиться относительно хорошего согласования результатов [5] и [6] с экспериментальными данными, хотя высокая точность моделирования большого числа «бочек» при этом не была достигнута.

В работе [7] проводилось моделирование недорасширенной струи в постановке, основанной на данных экспериментов [8]. Использовался российский программный пакет VP2/3, включающий реализацию метода расщепления по физическим процессам в рамках обобщенной процедуры коррекции давления. Было получено очень хорошее соответствие поперечных профилей экспериментальным результатам [8], подробно исследована картина течения, в том числе особенности турбулентных зон. Моделирование большого числа «бочек» не ставилось целью в указанной работе.

В настоящей работе для моделирования ударно-волновых структур, возникающих в недорасширенной сверхзвуковой струе, применяется численный алгоритм, основанный на регуляризованных (или квазигазодинамических (КГД)) уравнениях [9–12]. Целью работы является проверка возможности применения КГД-алгоритма к данному классу задач, поскольку КГД-метод успешно использовался для расчета недорасширенных струй (включая неравновесные эффекты) и ранее (см., например, [13]). При этом проблема получения большого числа «бочек» не акцентировалась. Кроме того, в КГД-модели имеется встроенная модель турбулентности, роль которой в задачах расчета струй требует исследования. Примеры использования КГД-алгоритма для расчета турбулентных течений можно найти в работах [10, 12–17].

В работе [18] КГД-модель впервые была обобщена на случай течения многокомпонентного газа с учетом поступательно-колебательной неравновесности. Построенный в [18] численный алгоритм используется для расчета сверхзвуковых нерасчетных струй умеренно-разреженного газа и анализа их теплового излучения. Получено, что применение КГД-уравнений позволяет точнее отражать тепловые свойства струи. В частности, интенсивность излучения оказывается существенно ниже, чем при расчете на основе системы уравнений Навье–Стокса, поскольку в слое смешения снижаются поступательная, вращательная и колебательная температуры.

### Постановка задачи

Задача моделирования струйного течения соответствует одному из вариантов экспериментальной постановки, описанной в работах [1, 2], и рассматривается в трехмерной постановке в декартовых координатах. Газовая струя круглого сечения втекает в область, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 1), заполненную неподвижным газом при нормальных условиях. Параметры струи выбирались в соответствии с экспериментальной работой [1]. Диаметр струи на входе составлял  $D = 0,0508$  м. Газ считался совершенным, его уравнение состояния связывает давление, плотность и температуру следующим образом:  $p = \rho RT$ . Параметры соответствуют параметрам воздуха: постоянная адиабаты —  $\gamma = 1,4$ , газовая постоянная —  $R = 287$  Дж/(кг·К), число Прандтля —  $Pr = 0,737$ .

Параметры струй в экспериментах [1, 2] определяются величинами: числом Маха на срезе сопла  $Ma$  (определяется формой сопла); параметром  $\beta$ , который связан с идеализированным числом Маха полностью расширенной струи (т.е. струи на расчетном режиме, когда давление на срезе сопла равно атмосферному)  $Ma_j$  зависимостью  $\beta = ((Ma_j)^2 - 1)^{1/2}$ . В настоящей работе рассматривается течение с  $Ma = 2$ ,  $\beta = 2$  (при этом  $Ma_j = 2,236$ ). Для моделирования требуется знать не только  $Ma$ , но также плотность и давление на срезе сопла. Вычислим эти величины следующим образом.

Будем считать, что в невозмущенной области плотность, давление и температура определяются нормальными условиями атмосферы:  $\rho_1 = 1,20433$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_1 = 101325$  Па,  $T_1 = 293,15$  К. Рассматривая струю на расчетном режиме и принимая, что при этом на срезе сопла  $Ma = Ma_j$  и  $p = p_1$ , вычислим давление торможения на основе изоэнтропической формулы [19] (см. страницу 108). Поскольку в работах [1, 2] не использовался

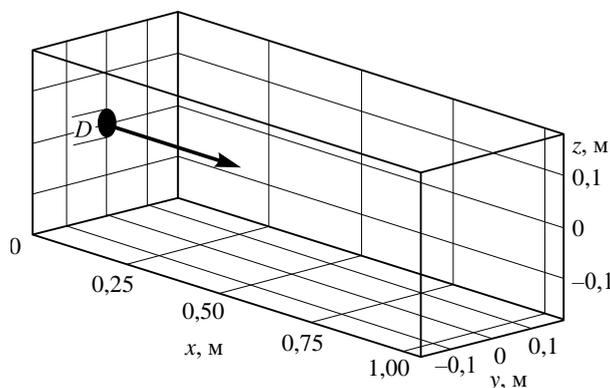


Рис. 1. Схема расчетной области.

подогрев струй, будем полагать, что температура торможения равна  $T_1$ . Зная параметры торможения и число Маха  $Ma$  на срезе сопла, по изэнтропическим формулам [19] определим на нем давление ( $p_0 = 146495$  Па) и температуру ( $T_0 = 162,861$  К). Через уравнение состояния найдем плотность на срезе сопла —  $\rho_0 = 3,13418$  кг/м<sup>3</sup>. Скорость звука при этом составляет  $c_0 = (\gamma RT_0)^{1/2} = 255,808$  м/с. Таким образом, степень нерасчетности струи  $p_0/p_1 = 1,46$ .

### Математическая модель

Моделирование сверхзвукового струйного течения вязкого газа проводилось на основе системы квазигазодинамических уравнений для совершенного политропного газа, построенной в работах [9–11]. В основе КГД-регуляризации лежит тот факт, что массовая плотность потока  $\mathbf{j}_m$  отличается от импульса единицы объема газа  $\rho \mathbf{u}$ , что приводит к появлению малых дополнительных диссипативных слагаемых в каждом из уравнений системы. Эти регуляризирующие слагаемые имеют физический характер и улучшают свойства численной устойчивости явных разностных алгоритмов, в которых пространственные производные аппроксимируются центральными разностями.

В декартовых координатах в отсутствии внешних сил и источников тепла КГД-система записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j), \quad (3)$$

где  $u_i$  — компоненты макроскопической скорости,  $E = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$  — полная удельная энергия,  $H = (E + p)/\rho$  — полная удельная энтальпия. Выражения для вектора плотности потока массы  $j_m^i$ , тензора вязких напряжений  $\Pi^{ij}$  и теплового потока  $q^i$  записываются как

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^j = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p), \quad (4)$$

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u^i \rho \left( u_k \nabla^k u^j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p \right) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \quad (5)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu \left( \nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \delta^{ij} \nabla^k u_k \right) + \xi \delta^{ij} \nabla^k u_k, \quad (6)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u^i \rho \left( u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho} \right), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T, \quad (7)$$

здесь  $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$  — внутренняя энергия единицы массы газа,  $\Pi_{NS}^{ij}$  и  $q_{NS}^i$  — тензор вязких напряжений и тепловой поток в системе Навье–Стокса,  $\mu$ ,  $\xi$  и  $\kappa$  — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости и теплопроводности соответственно. Определим  $\mu$  через температурную зависимость:

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^\omega, \quad (8)$$

где  $\mu_0 = 1,16869 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с) — вязкость газа при температуре на срезе сопла  $T_0$  (значение вязкости получено на основе данных стандартной атмосферы на высоте 4160 м, ГОСТ 4401-81),  $\omega = 0,74$  — показатель межмолекулярного взаимодействия. Выразим коэффициент теплопроводности с использованием числа Прандтля Pr:

$$\kappa = \mu R \gamma / (\text{Pr} (\gamma - 1)), \quad (9)$$

коэффициент объемной вязкости положим равным нулю. Число Рейнольдса, вычисленное по начальной вязкости  $\mu_0$ , размеру сопла  $D$ , начальной скорости  $\text{Ma} \cdot c_0$  и начальной плотности  $\rho_0$ , составляет  $\text{Re} = 7 \cdot 10^6$ .

Коэффициент  $\tau$ , определяющий дополнительную диссипацию в КГД-алгоритме, для вязкого политропного газа имеет порядок характерного времени между столкновениями частиц газа. В проводимых расчетах его величина связывается с шагом пространственной сетки  $h$ :

$$\tau = \alpha h / c, \quad (10)$$

где  $c$  — локальная скорость звука,  $\alpha = 0,6, \dots, 1,0$  — настроечный параметр.

### Расчетные сетки и метод численного решения

В расчетной области (см. рис. 1) введем равномерную сетку с кубическими ячейками. Круглое сопло диаметром  $D$  размещается на стенке ( $x = 0$ ) и расположено симметрично относительно осей  $Y$  и  $Z$ . Размеры расчетной области в направлениях  $Y$  и  $Z$  одинаковы и равны  $7D$ . Длина расчетной области в направлении  $X$  в разных вариантах составляет  $21D$  и  $35D$ . На диаметр сопла в зависимости от размеров сетки приходится 10, 20 и 30 ее ячеек. В работе используются четыре варианта сетки, их характеристики приведены в таблице.

На построенных сетках КГД-уравнения аппроксимируются центральными разностями, аппроксимация имеет второй порядок точности по пространству. Решение начально-краевой задачи для сеточных аналогов КГД-уравнений (1) – (7) с учетом соотношений (8) – (10) находится по явной по времени конечно-разностной схеме, имеющей первый порядок аппроксимации по времени. Шаг по времени вычисляется как  $h_t = \beta_C h / c_0$ , где  $\beta_C = 0,01, \dots, 0,02$  — число Куранта.

В начальный момент параметры среза сопла  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ , и горизонтальная скорость  $\text{Ma} \cdot c_0$  задаются в горизонтальном цилиндре с основанием, совпадающим с соплом на стенке ( $x = 0$ ) и занимающим всю длину расчетной области. Вне цилиндра задаются параметры невозмущенного газа (нормальные условия при  $\rho_1$ ,  $p_1$ ,  $T_1$  и нулевой скорости). В процессе расчета по явной схеме на срезе сопла при  $x = 0$  параметры газа поддерживаются постоянными, вне сопла на стенке ( $x = 0$ ) поддерживаются постоянными

Таблица  
Варианты расчетных сеток

Сетка	Длина области	Число ячеек на диаметр сопла (cells per diameter, CPD)	Шаг сетки $h$ , м	Число узлов сетки
1	$21D$	10	0,005	1088640
2	$21D$	20	0,0025	846880
3	$21D$	30	0,0017	28314720
4	$35D$	10	0,005	1814400

параметры невозмущенного газа. На остальных границах области поддерживается равенство нулю всех нормальных производных. Хотя такие условия соответствуют полностью сверхзвуковому течению, при расчете недорасширенной сверхзвуковой струи, втекающей в область неподвижного газа, они также работают хорошо, несмотря на наличие дозвуковых областей вне струи.

Расчеты проводились с помощью суперкомпьютера К-100, установленного в Центре коллективного пользования Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН [20]. При этом использовалось распараллеливание вычислений, основанное на декомпозиции расчетной области с применением стандарта передачи сообщений MPI. В зависимости от варианта расчета, машинное время составляло от 30 мин до 20 часов при использовании от 96 до 128 процессорных ядер.

Отметим, что применение описанного численного алгоритма для КГД-уравнений в задаче моделирования распада вихря Тейлора – Грина [14] позволило получить хорошее согласование профиля диссипации кинетической энергии с эталонными данными, а также соответствие энергетического спектра колмогоровскому закону убывания энергии с ростом частоты в инерционном интервале. При этом шаг пространственной сетки составлял от 0,0005 до 0,00025 м, настроечный параметр  $\alpha$  менялся от 0,1 до 1. Применение этого же алгоритма для КГД-уравнений к моделированию турбулентного течения Куэтта в плоском канале [15] показало хорошее согласование величин турбулентных пульсаций трех компонент скорости потока с соответствующими экспериментальными и расчетными данными, известными из литературных источников, при этом шаг сетки составлял 0,001 м, параметр  $\alpha = 0,1$ . В работе [21] КГД-алгоритм, реализованный в программном комплексе OpenFOAM, применялся для моделирования взаимодействия сильно недорасширенных газовых струй с преградами. Было получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных при моделировании сложных ударно-волновых структур, возникающих при таком взаимодействии.

### Эволюция струйного течения и выбор времени осреднения

Анализ развития струйного течения во времени, проведенный с помощью моделирования при  $\alpha = 0,8$  и  $\alpha = 1,0$  на различных расчетных сетках при длине области  $35D$ , демонстрирует качественно сходные результаты. На рис. 2 показаны рассчитанные мгновенные уровни давления в сечении  $z = 0$  для моментов времени 2, 4, 30, 50 мс, а также осредненные от 30 до 50 мс уровни давления, полученные на сетке 4 при  $\alpha = 0,8$ .

Эволюция струйного течения происходит следующим образом. От начального момента времени до 2 мс формируется периодическая структура в ближней зоне струи ( $x < 20D \sim 1$  м, 6–7 «бочек»). После этого периодическая структура в этой зоне меняется мало.

В период времени от 4 до 30 мс происходит переходный процесс формирования нестационарного течения в области  $20D < x < 35D \approx 1,75$  м, а от 30 до 50 мс струйное течение в этой области становится выражено турбулентным. Общая структура течения в период от 30 до 50 мс сохраняется, при этом течение становится несимметричным. В области  $x < 20D$  продолжают существовать 6–7 относительно устойчивых «бочек», вокруг которых присутствуют нестационарные вихревые структуры. В области  $20D < x < 35D$  располагается в целом нестационарная часть течения, но несколько «бочек» (хотя и слабо выраженных) существует и в этой области, что видно на осредненном от 30 до 50 мс поле давления (рис. 2е). Общий характер струи является турбулентным,

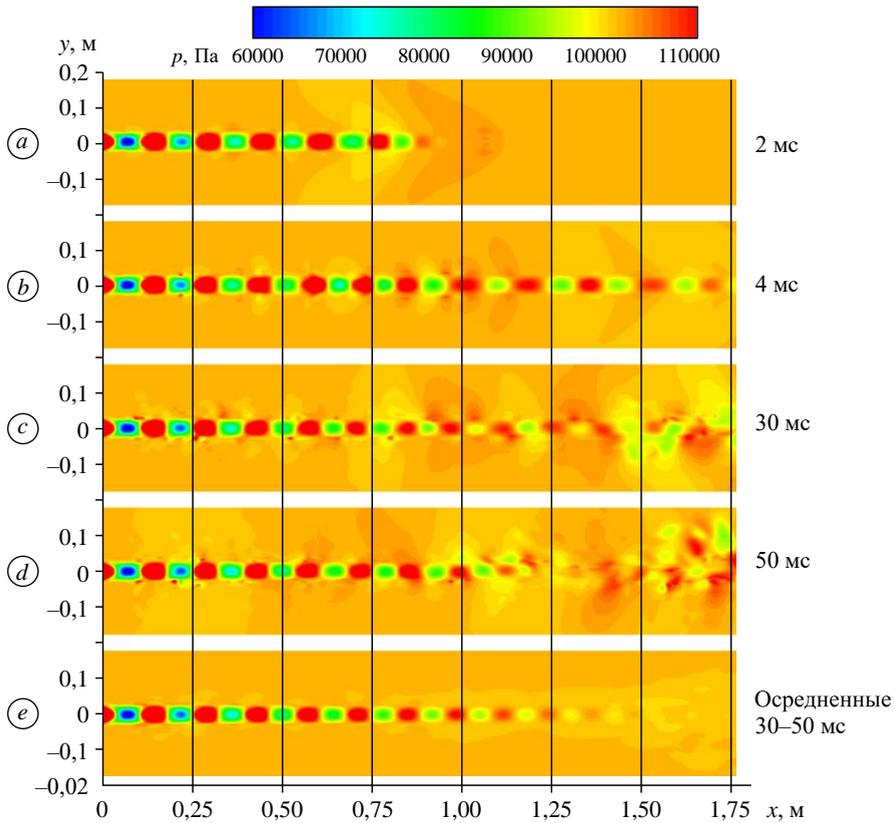


Рис. 2. Мгновенные (a–d) и осредненные от 30 до 50 мс (e) уровни давления в сечении  $z = 0$ .

что соответствует числу Рейнольдса, вычисленному по начальным параметрам струи. Характер осредненных периодических структур при этом соответствует данным эксперимента [1, 2] для рассматриваемого варианта струи. Осреднение данных моделирования перед сравнением с результатами эксперимента оправдано, поскольку, как указывают авторы [1], экспериментальные данные также осредняются по времени, и пульсации при этом не исследуются.

Для иллюстрации трехмерного несимметричного характера нестационарного струйного течения на рис. 3 приведены уровни давления, нанесенные на изоповерхности градиента давления в момент времени 44 мс в неосредненном и осредненном виде, полученные при моделировании на сетке 4 при  $\alpha = 0,8$ .

На рис. 4 сплошной линией показан спектр удельной кинетической энергии нестационарного участка струи, соответствующего рис. 3a, при 44 мс (сетка 4,  $\alpha = 0,8$ ). Спектр вычислялся в кубической области, близкой к выходной границе ( $1,4 < x < 1,67$ ,  $-0,13 < y < 0,13$ ,  $-0,13 < z < 0,13$  м), по неосредненному полю течения. Методика вычисления энергетического спектра основана на дискретном преобразовании Фурье и детально описывалась в работе [16]. Также на рис. 4 изображена штриховая прямая с угловым коэффициентом  $-5/3$ , соответствующим колмогоровскому закону убывания энергии турбулентных пульсаций с увеличением их частоты. Видно, что применяемый в настоящей работе численный метод и выбранные размеры расчетных ячеек позволяют моделировать спектр пульсаций на части инерционного интервала, как и в случаях применения

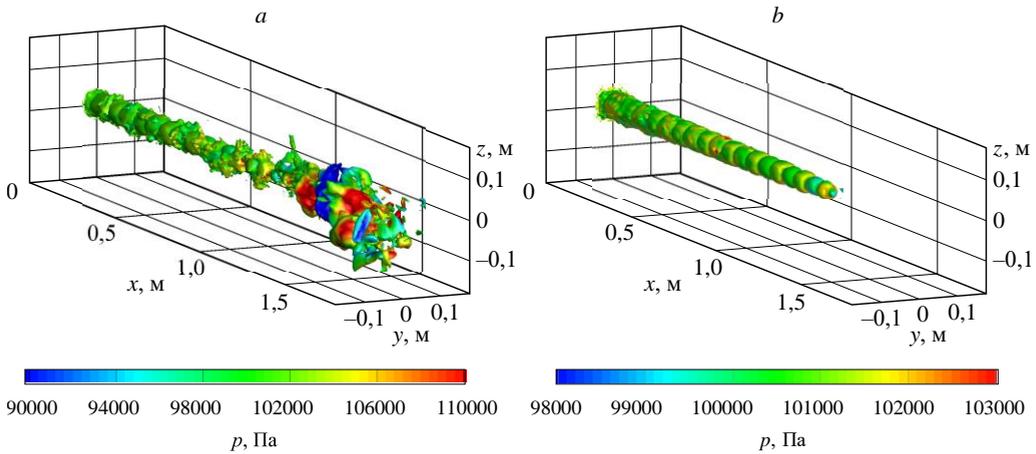


Рис. 3. Мгновенные (а) и осредненные от 30 до 44 мс (б) уровни давления, нанесенные на изоповерхности модуля градиента давления в момент времени 44 мс.

КГД-алгоритма к задаче моделирования распада вихря Тейлора–Грина [14] и задаче о распаде однородной изотропной турбулентности [16].

Анализ эволюции струйного течения показывает, что для исследования ближней зоны течения достаточно выполнить моделирование при длине области  $21D$  (сетки 1, 2 и 3) и провести осреднение от 2 до 4 мс. Для исследования особенностей удаленной от сопла нестационарной области струи требуется использовать более длинную расчетную область и большее время расчета, проводя осреднение, например, от 30 до 50 мс. Однако при этом становится затруднительным использование подробных сеток (от 20 и более ячеек на  $D$ ), поскольку машинное время расчета сильно увеличивается.

Отметим, что частица газа при скорости звука за время 4 мс успела бы пройти около 1 м, что приблизительно равно длине расчетной области  $21D$ . При исследовании нестационарных областей в струйном течении в ходе моделирования желательно не применять условия симметрии, поскольку такое течение имеет существенно трехмерный несимметричный характер. Кроме того, при моделировании несимметричных структур предпочтительно использование равномерной сетки с кубическими ячейками.

### Сходимость результатов при измельчении сетки

На рис. 5 приведены осевые профили осредненного давления, нормированного на атмосферное давление  $p_{atm}$ . Символы 1 соответствуют экспериментальным результатам работы [1], кривые 2–4 представляют результаты моделирования на основе КГД-алгоритма на сетках 1 (кривая 2), 2 (кривая 3) и 3 (кривая 4). Длина области составляет  $21D$ , настроечный параметр  $\alpha = 0,6$ , осреднение проводилось от 2 до 4 мс. Слева представлена полная область расчета, справа фрагмент, содержащий первые три

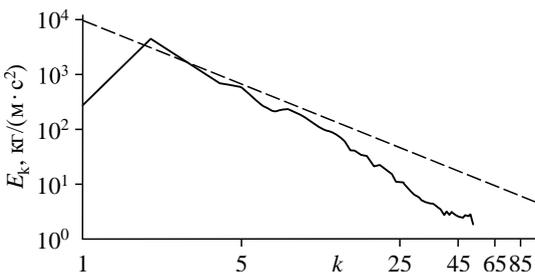


Рис. 4. Энергетический спектр удельной кинетической энергии турбулентной зоны струи при 44 мс (сплошная кривая) и прямая с угловым коэффициентом  $-5/3$ , соответствующим колмогоровскому закону убывания энергии турбулентных пульсаций (штриховая линия).

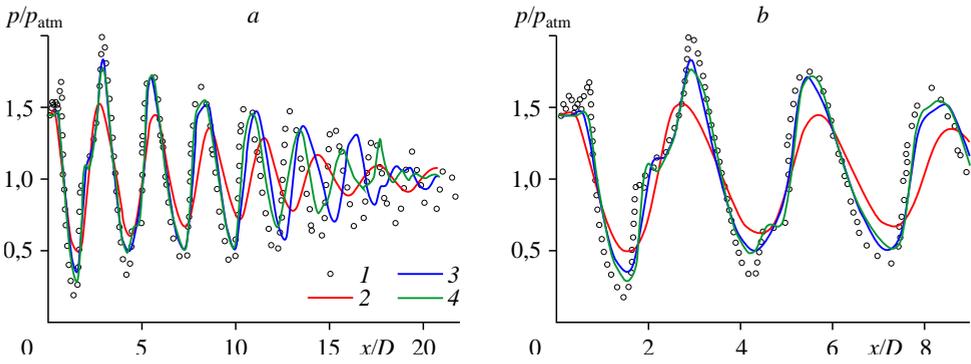


Рис. 5. Осевые профили осредненного нормированного давления.

1 — данные эксперимента [1], 2–4 — результаты моделирования на основе КГД-алгоритма при CPD = 10 (2), 20 (3), 30 (4).

«бочки». Видно, что при измельчении сетки результаты моделирования становятся заметно ближе к экспериментальным данным. Недостаточная (по сравнению с экспериментальными значениями) амплитуда колебаний профиля давления в расчете обусловлена, вероятно, диссипативностью используемого варианта КГД-алгоритма, которая обеспечивает устойчивость расчета при моделировании течения сложной структуры при наличии сверх- и дозвуковых областей, а также зон турбулентности. Тем не менее, результаты, полученные на сетках 2 и 3, показывают в целом достаточно хорошее соответствие с экспериментальными данными, в частности, на сетке 3 удастся разрешить ступенчатый характер профиля первых двух «бочек». Возможно, при использовании более подробных сеток на основе КГД-алгоритма можно получить более точное соответствие значений максимумов экспериментальным данным. При  $x > 10D$  частота и амплитуда периодических структур отстают от экспериментальных значений, но при этом данные более подробной сетки в целом ближе к экспериментальным значениям, чем полученные на более грубых.

На рис. 6 приведены осевые профили для осредненного числа Маха, при этом параметры расчетов и обозначения здесь такие же, как на рис. 5. Анализ рисунка также показывает сходимость результатов к экспериментальным данным при измельчении сетки и хорошее количественное соответствие эксперименту при  $x < 10D$ , в том числе наличие ступенек в профиле числа Маха в первой и второй «бочках». Однако для числа Маха меньшее значение амплитуды колебаний профиля по сравнению с данными эксперимента заметнее, чем для давления, и крутые фронты экспериментального профиля несколько размазаны.

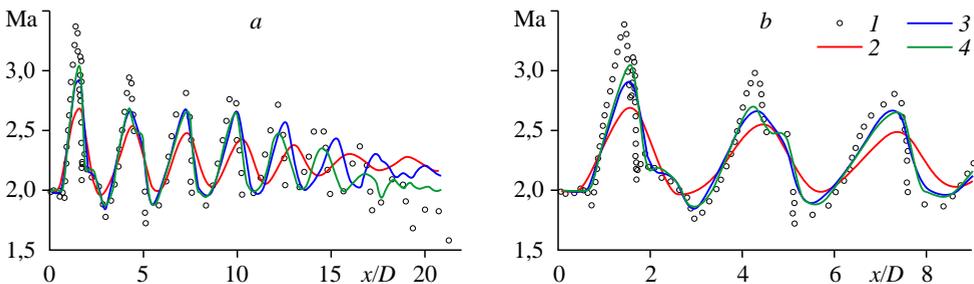


Рис. 6. Профили осредненного числа Маха.

Обозначения см. на рис. 5.

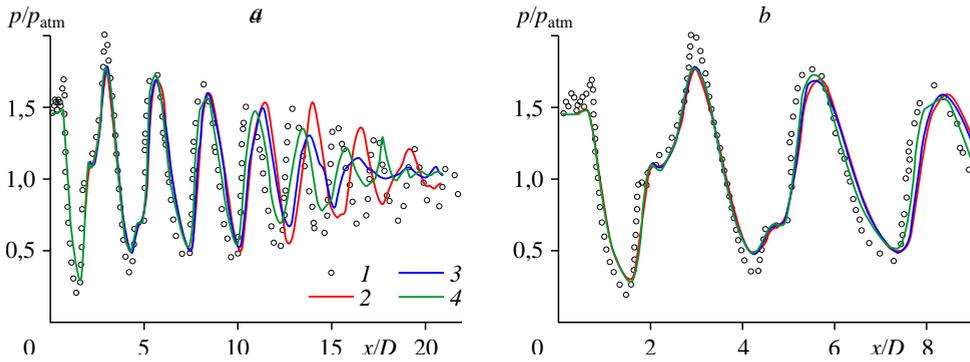


Рис. 7. Осевые профили осредненного нормированного давления.

1 — данные эксперимента [1], 2–4 — результаты расчетов при  $\alpha = 1$  (2), 0,8 (3), 0,6 (4).

Расхождение по частоте с экспериментальными данными наблюдается в удаленной от сопла области: «бочки» по результатам расчета расположены несколько дальше от сопла по сравнению с данными эксперимента. Авторы работы [1] утверждают, что при проведении лабораторных экспериментов в расширяющейся части сверхзвукового сопла происходит нарастание пограничного слоя. Может быть, это ведет к уменьшению эффективного диаметра сопла, так что масштаб координаты  $x/D$  определен не совсем точно. С другой стороны, в расчете эффективный диаметр сопла также определен не совсем точно из-за приблизительной аппроксимации сопла на расчетной сетке с квадратными ячейками, особенно при использовании более грубых сеток. Поэтому возможно несовпадение масштабов оси абсцисс при построении экспериментальных и расчетных осевых профилей, и в таком случае сравнение расположения «бочек» на удалении от сопла не очень показательное.

### Зависимость результатов от настроечного параметра КГД-алгоритма

На рис. 7 приведены осевые профили осредненного давления, нормированного на атмосферное давление  $p_{\text{atm}}$ . Символы 1 соответствуют экспериментальным результатам работы [1], кривые 2–4 показывают результаты моделирования при различных значениях настроечного параметра КГД-алгоритма:  $\alpha = 1,0$  (кривая 2),  $\alpha = 0,8$  (кривая 3) и  $\alpha = 0,6$  (кривая 4). Длина области при этом составляет  $21D$ , используется сетка 3, осреднение проводилось от 2 до 4 мс. Слева представлена полная область расчета, справа — фрагмент, содержащий первые три «бочки». Рисунок 7 показывает, что при уменьшении  $\alpha$  результаты моделирования становятся несколько ближе к экспериментальным данным, особенно при  $x > 10D$ , хотя в этой области все результаты расчетов отстают от экспериментальных по частоте и амплитуде. При  $x < 10D$  результаты расчетов мало зависят от  $\alpha$  и весьма близки к экспериментальным данным.

### Заключение

Моделирование сверхзвуковой недорасширенной затопленной струи, проведенное на основе КГД-алгоритма в трехмерной постановке, позволяет определить структуру периодических ударно-волновых областей («бочек»), а также общую структуру течения и спектр турбулентных пульсаций нестационарной зоны течения на части инерционного интервала. При использовании расчетных сеток, содержащих порядка 30 ячеек на диаметр струи, получено достаточно хорошее количественное совпадение с экспериментальными данными в ближней зоне струи (первые 3–4 «бочки»). Предпочтительным является

использование более подробных сеток (имеет место сходимость результатов к экспериментальным значениям при измельчении сетки) и меньших значений настроечного параметра КГД-алгоритма ( $\alpha = 0,6$  по сравнению с  $1,0$ ). Однако даже при использовании относительно грубых сеток (10 ячеек на диаметр струи) на достаточно длинной расчетной области обнаруживается формирование около десяти «бочек», как и в эксперименте.

Авторы признательны М.В. Крапошину и А.С. Епихину за обсуждение исследуемой задачи.

### Список литературы

1. Seiner J.M., Norum T.D. Experiments of shock associated noise on supersonic jets // AIAA Paper. 1979. No. 79-1526.
2. Norum T.D., Seiner J.M. Measurements of mean static pressure and far-field acoustics of shock-containing supersonic jets // NASA Technical Memorandum 84521. 1982. 204 p.
3. Leon O., Donjat D., Olchewsky F., Desse J., Nicolas F., Champagnat F. Three-dimensional density field of a screeching under-expanded jet in helical mode using multi-view digital holographic interferometry // J. of Fluid Mech. 2022. Vol. 947. P. A36-1–A36-38.
4. McGuirk J., Feng T. The near-field aerodynamic characteristics of hot high-speed jets // J. of Fluid Mech. 2021. Vol. 915. P. A120-1–A120-31.
5. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 9. С. 142-1–142-8.
6. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Прикладные задачи газодинамики и теплообмена в энергетических турбинах ракетной техники. М.: Изд-во МАИ. 2014. 168 с.
7. Исаев С.А., Липницкий Ю.М., Баранов П.А., Панасенко А.В., Усачов А.Е. Моделирование турбулентной сверхзвуковой недорасширенной струи, истекающей в затопленное пространство, с помощью модели переноса сдвиговых напряжений // Инж.-физ. журнал. 2012. Т. 85, № 6. С. 1253–1267.
8. Запрягаев В.И., Кавун И.Н., Киселев Н.П. Структура течения на начальном участке сверхзвуковой струи, истекающей из сопла с шевронами // Прикл. механика и технич. физика. 2010. Т. 51, № 2. С. 71–80.
9. Chetverushkin B.N. Kinetic schemes and quasi-gas dynamic system of equations. Barcelona: CIMNE, 2008. 298 p.
10. Elizarova T.G. Quasi-gas dynamic equations. Dordrecht: Springer, 2009. 300 p.
11. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2016. 222 с.
12. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.
13. Mate V., Graur I., Elizarova T., Chirokov I., Tejada G., Fernandez J., Montero S. Experimental and numerical investigation of an axisymmetric supersonic jet // J. of Fluid Mech. 2001. Vol. 426. P. 177–197.
14. Shirokov I.A., Elizarova T.G. Simulation of laminar-turbulent transition in compressible Taylor-Green flow basing on quasi-gas dynamic equations // J. of Turbulence. 2014. Vol. 15, Iss. 10. P. 707–730.
15. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Применение квазигазодинамических уравнений к моделированию пристеночных турбулентных течений // Тр. ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Прикладная математика и информатика / Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2016. № 51. С. 52–80.
16. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Тестирование КГД-алгоритма на примере задачи о распаде однородной изотропной турбулентности // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 35. 19 с.
17. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Моделирование нестационарного дозвукового обтекания осесимметричного тела с турбулизатором // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29, № 1. С. 37–44.
18. Молчанов А. М., Попов В. Э. Расчет газовой динамики и излучения высотных струй // Физ.-хим. кинетика в газовой динамике. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 753-1–753-20.
19. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
20. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow.  
<https://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html> (дата обращения 31.05.2024)
21. Епихин А.С., Елизарова Т.Г. Численное моделирование газодинамики процесса взаимодействия недорасширенных струй с наклонной преградой // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 4. С. 509–517.

*Статья поступила в редакцию 30 июня 2023 г.,  
после доработки — 9 августа 2023 г.,  
принята к публикации 21 ноября 2023 г.*