

# Influence of Tetrahedral Mesh Characteristics on the Accuracy of Supersonic Flow Modeling of Axisymmetric Model

I. A. Shirokov<sup>1</sup>, T. G. Elizarova<sup>2</sup>

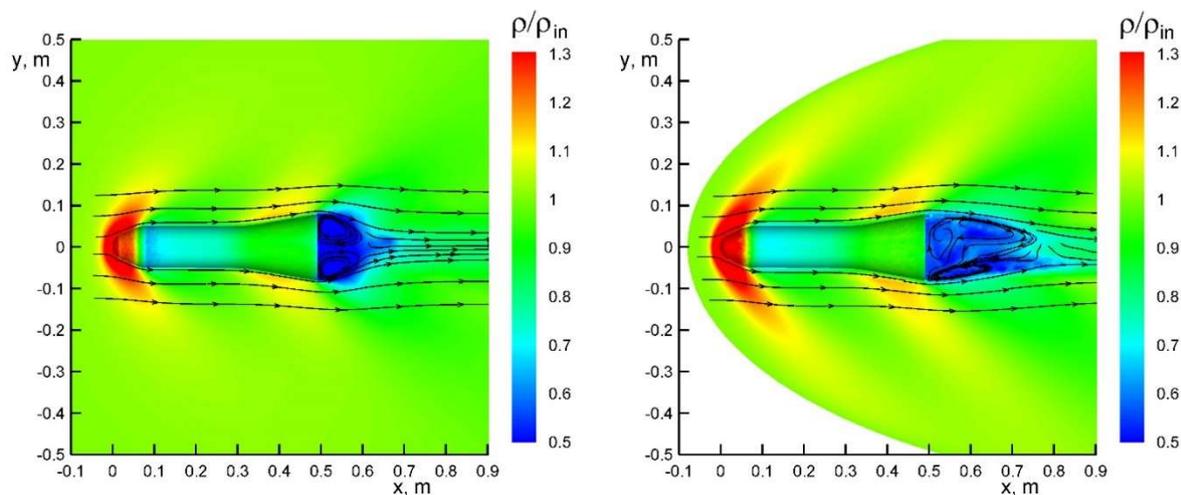
<sup>1</sup>Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, Russia

<sup>2</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047, Miusskaya sq., 4, Russia  
ivanshirokov@inbox.ru

## Abstract

The paper examines the effect of the parameters of unstructured tetrahedral meshes on the results of modeling the flow around the standard HB-2 model with a viscous thermally conductive gas at zero angle of attack, the Mach number is 1.5. The meshes were constructed using the free TetGen and Gmsh software packages. The simulation was based on the system of regularized (quasi-gas dynamic) equations. It was shown that using the better meshes according to a set of criteria (small size of cells on the surface of the model, low degree of unevenness, high quality of cells), the simulation results are closer to experimental data than on meshes that are the worse according to the specified criteria. In addition, with the improvement of the quality of the meshes, it becomes possible to simulate non-stationary flow modes.

Keywords: tetrahedral mesh, mesh generators, HB-2 model, quasi-gas dynamic algorithm



Modeling of the supersonic flow around the HB-2 model using different tetrahedral meshes, stationary (left) and non-stationary (right) cases

УДК 519.6.533.5

# Влияние характеристик тетраэдральных сеток на точность моделирования сверхзвукового обтекания осесимметричной модели

И. А. Широков<sup>1</sup>, Т. Г. Елизарова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, Россия, Москва, 119991, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52*

<sup>2</sup> *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия, Москва, 125047, Миусская пл. 4а  
ivanshirokov@inbox.ru*

## Аннотация

В работе исследуется влияние параметров неструктурированных тетраэдральных сеток на результаты моделирования обтекания стандартной модели НВ-2 вязким теплопроводным газом при нулевом угле атаки, число Маха равно 1.5. Расчетные сетки строились с помощью свободно распространяемых пакетов TetGen и Gmsh. Моделирование проводилось на основе системы регуляризованных (квазигазодинамических) уравнений. Показано, что при использовании сеток, лучших по совокупности критериев (малый размер ячеек на поверхности модели, малая степень неравномерности, высокое качество ячеек), результаты моделирования ближе к экспериментальным данным, чем на сетках, худших по указанным критериям. Кроме того, при улучшении качества сеток появляется возможность моделирования нестационарных режимов обтекания.

Ключевые слова: тетраэдральная сетка, сеточные генераторы, модель НВ-2, квазигазодинамический алгоритм

## 1. Введение

Для численного моделирования газо- и гидродинамических течений в пространственных областях широко применяется метод конечных объемов для аппроксимации макроскопических уравнений на расчетных сетках, заполняющих исследуемую область. Распространенным типом таких сеток являются неструктурированные тетраэдральные сетки, для генерации которых разработаны многочисленные математические подходы [1–4] и программные пакеты, в том числе свободно распространяемые [5–7]. Качество численного моделирования, помимо характеристик разностного алгоритма, в большой мере определяется качеством используемой сетки. Влияние качества сеток с ячейками различной формы на решение фронта ударной волны при сверхзвуковом обтекании затупленного тела исследовано в [8] и сделан вывод о существенном влиянии формы ячеек и степени неравномерности сетки на результаты моделирования. Показано, что преимуществом среди рассмотренных сеток обладают равномерные с ячейками кубической формы.

Расчетные сетки в целом должны удовлетворять противоречивым требованиям: они не должны иметь слишком большое число элементов, их генерация не должна занимать значительное машинное время, сетки не должны быть слишком грубыми и должны иметь достаточно качественные элементы (в данной работе – тетраэдры). Первые два требования обусловлены мощностью доступных вычислительных систем. Характерный размер элементов и их качество (определяемое как мера отличия от правильного тетраэдра) влияют на точность аппроксимации уравнений и, в конечном итоге, на точность моделирования физических

процессов. При уменьшении размера элементов и улучшения их качества возрастают число узлов и машинное время генерации сетки (следует учесть, что для генерации качественных ячеек требуется применять алгоритмы оптимизации).

На практике применяются компромиссные подходы. В частности, при моделировании газодинамических течений применяют сгущение сеток в «важных» частях расчетной области (пограничный слой, скачки уплотнения и т.д.). В таких случаях сетка получается неравномерной, что может негативно сказываться на качестве моделирования. Исследование влияния параметров сетки (характерный размер ячеек, степень неравномерности и качество ячеек) на точность моделирования физических процессов представляет большой интерес с точки зрения выбора оптимальных методов генерации сеток в конкретных задачах.

В данной работе влияние параметров неструктурированных тетраэдральных сеток исследуется на примере моделирования внешнего сверхзвукового (число Маха  $Ma = 1.5$ ) обтекания вязким теплопроводным газом осесимметричной стандартной модели НВ-2 [9–12] с диаметром цилиндрической части  $D = 0.1$  м при нулевом угле атаки, с числом Рейнольдса  $Re_D = 2 \times 10^5$ .

В качестве математической модели используется квазигазодинамический (КГД) алгоритм, представляющий собой аппроксимацию КГД уравнений на пространственных сетках и последующее решение начально-краевой задачи [13–15]. КГД уравнения представляют собой регуляризованные уравнения газовой динамики. Регуляризация основана на предположении, что плотность потока массы жидкости отличается от среднего импульса единицы объема на малую величину. Вид возникающих при этом диссипативных добавок удастся получить либо с использованием кинетической модели, либо применяя осреднение исходных уравнений по малому пространственно-временному интервалу. Построенные таким образом уравнения тесно связаны с исходной системой уравнений газовой динамики, записываются в виде законов сохранения массы, импульса и полной энергии и обеспечивают неубывание термодинамической энтропии системы. Дополнительная диссипация КГД уравнений повышает их вычислительную устойчивость и позволяет использовать условно-устойчивую явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями без введения дополнительных лимитеров.

Первый вариант КГД уравнений и примеры моделирования задачи обтекания пластины в сравнении с моделью Навье–Стокса и расчетами по методам прямого моделирования Монте-Карло изложены в [16]. В дальнейшем было показано, что КГД алгоритм является достаточно универсальным средством исследования особенностей газодинамических течений в дозвуковом и сверхзвуковом режимах [17–20]. Опыт численных расчетов показал преимущества КГД алгоритмов при моделировании нестационарных течений, включая прямое моделирование турбулентных течений при небольших числах Рейнольдса [18]. Возможность моделирования нестационарного течения в донной области за телом в рамках КГД уравнений зависит от расчетной сетки и исследуется в настоящей работе.

Конкретная реализация КГД алгоритма соответствует [19, 20]. Применяются неструктурированные тетраэдральные сетки, построенные с помощью свободно распространяемых сеточных генераторов TetGen [21] и Gmsh [22]. Результаты, полученные при расчетах на различных сетках, сравниваются с данными, полученными при экспериментальных исследованиях моделей НВ-2 в аэродинамических трубах [9–11]. Результаты сравнения позволяют сделать выводы о важности различных характеристик расчетных сеток в свете повышения точности моделирования газодинамического обтекания, а также возможности моделирования нестационарных режимов течения.

## 2. Описание и анализ используемых сеток

Для построения сеток используются свободно распространяемые сеточные генераторы TetGen (версия 1.5) и Gmsh (версия 4.9.3). Оба генератора позволяют строить нерегулярные тетраэдральные сетки в заданной пространственной области, при этом характерный шаг

сетки может задаваться на границах области. Алгоритмы генераторов основаны на триангуляции Делоне.

Для построения сетки с помощью TetGen был разработан оригинальный алгоритм построения поверхностной сетки, используемой как входные данные для TetGen [23]. Для запуска TetGen использовалась команда `tetgen.exe -pq1.4/17a0.00007Y hb2.poly`. Значения опций следующие: `-p` создать тетраэдральную сетку, `-q` оптимизировать сетку (параметры оптимизации: 1.4 – максимальное отношение радиуса описанной вокруг тетраэдра сферы к минимальному ребру, 17 – минимальный двугранный угол тетраэдра в градусах), `-a` задает максимальный объем тетраэдра, `-Y` сохраняет заданную в файле `hb2.poly` поверхностную сетку.

Технология построения сеток Gmsh в целом следует методике, описанной в [7]: с помощью встроенной в Gmsh системы автоматизированного проектирования (САПР) строится геометрическое описание модели НВ-2 (файл `hb2.geo`), которое используется как входные данные для генерации сетки. Генерация в Gmsh проводится в интерактивном режиме с параметрами по умолчанию, при этом для построения поверхностных сеток используется алгоритм Frontal-Delaunay, для построения сеток в объеме – алгоритм Delaunay, а также задействуется оптимизация качества ячеек (алгоритм оптимизации Gmsh).

Генерация сеток проводилась на персональных компьютерах, время генерации одной сетки не превышает 10 минут. В табл. 1 показаны характеристики построенных сеток.

Таблица 1

Характеристики расчетных сеток

Сетка	Генератор	Число ячеек	$hm$ , м	$hd$ , м	Отношение макс. и мин. размеров ячеек, приблизительно
(1)	TetGen	806108	0.002	0.05	50
(2)	TetGen	2587192	0.001	0.05	100
(3)	Gmsh	365714	0.008	0.04	5
(4)	Gmsh	2871822	0.004	0.02	5
(5)	Gmsh	6753696	0.003	0.015	5
(6)	Gmsh	7857823	0.008	0.008	1

Здесь  $hm$  – характерный линейный размер ячеек на поверхности модели,  $hd$  – максимальный характерный линейный размер ячеек на внешней границе расчетной области. Эти величины задаются как параметры при построении сетки.

Расчетные области для всех сеток осесимметричны. Для сеток (3)–(6) расчетные области одинаковы и имеют форму фрагмента эллипсоида. Для сеток (1) и (2) расчетные области имеют форму усеченного конуса и близки по размерам. На рис. 1 приведен общий вид сеток (2) и (4) в осевом сечении.

В последнем столбце табл. 1 показано приблизительное отношение между максимальным и минимальным линейным размером ячеек. Это отношение может служить мерой неравномерности сетки. Авторы [7] утверждают, что нежелательно, когда это отношение больше 10. Для более детальной оценки степени неравномерности сеток приведем удельные распределения размеров тетраэдральных ячеек: минимальной (слева) и максимальной (справа) длины ребра ячейки (рис. 2). Маркировка кривых соответствует табл. 1. Абсциссы маркеров  $m$  (model) и  $d$  (domain) обозначают характерные размеры сетки  $hm$  и  $hd$ , указанные в табл. 1.

Таблица 1 и распределения на рис. 2 наглядно показывают, что сетки (1) и (2) обладают гораздо большей неравномерностью по сравнению с (3)–(6). Это происходит отчасти из-за

большей разницы между заданными характерными размерами на границах модели и расчетной области для сеток (1) и (2), отчасти из-за разницы алгоритмов: TetGen по умолчанию создает тетраэдральную сетку с сильным сгущением к границам модели и области (т.е. с разрежением при удалении границ). Генератор Gmsh, наоборот, по умолчанию строит приблизительно равномерную тетраэдральную сетку. При этом, если задается различные величины шага сетки на различных границах области, то шаг пространственной сетки равномерно меняется от одной границы до другой.

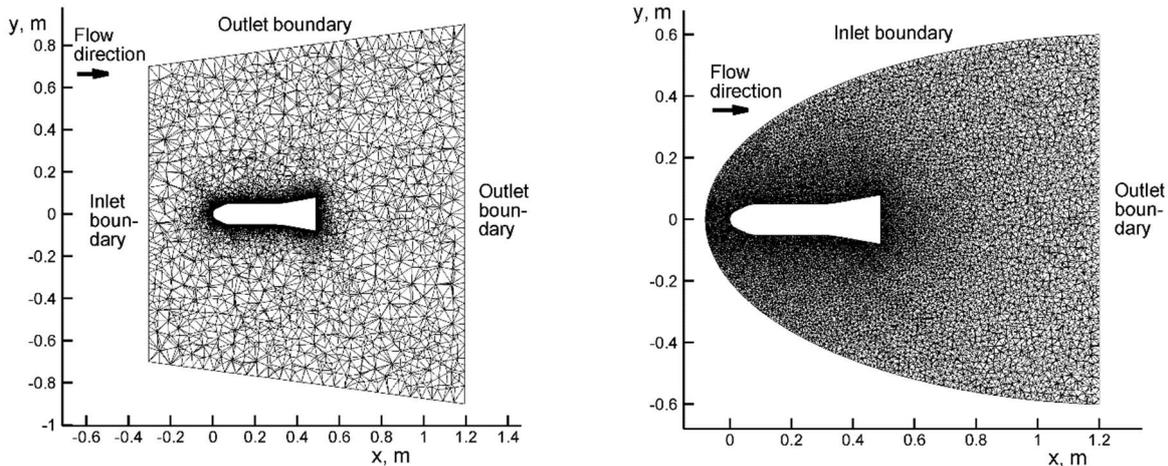


Рис. 1. Сечение расчетных сеток (2), слева, и (4), справа, при  $z = 0$ , и расположение границ

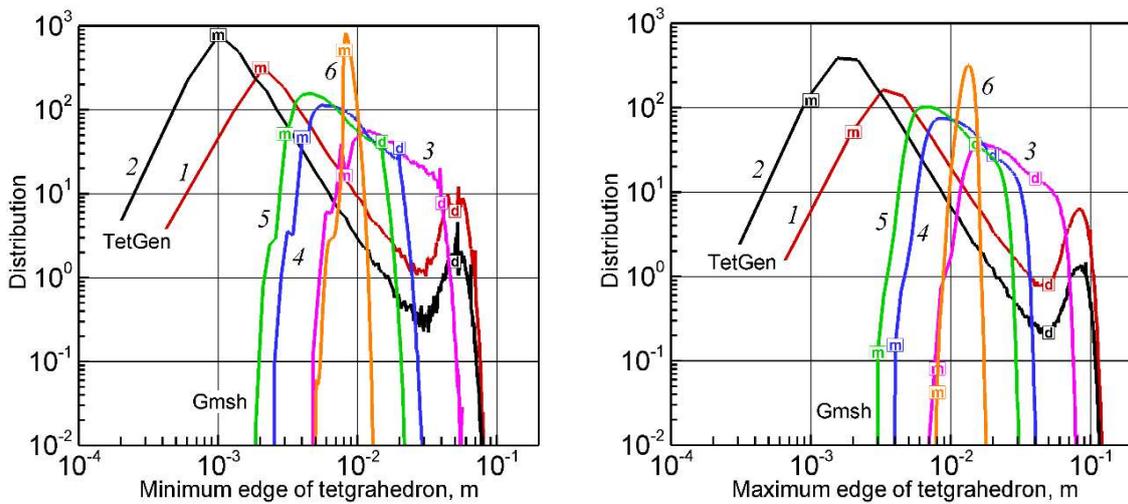


Рис. 2. Распределения размеров ячеек: минимальной (слева) и максимальной (справа) длины ребра ячейки для построенных сеток. Маркеры обозначают характерный шаг сетки, заданный на поверхности модели и на границе области. Нумерация кривых соответствует табл. 1

Построение сеток с малым  $hm$  и малой неравномерностью приводит к сильному увеличению числа ячеек сетки, и, как следствие, к увеличению вычислительных трудностей. Поэтому построенные сетки имеют компромиссный характер с целью сохранения умеренного числа ячеек.

Для оценки качества используемых сеток рассмотрим весовые (по числу ячеек) распределения критерия качества тетраэдральной ячейки  $q$  (рис. 3). Критерий качества вычисляется как  $q = 3r/R$ , где  $r$  – радиус вписанной в тетраэдр сферы,  $R$  – радиус описанной вокруг тетраэдра сферы [7]. В случае правильного тетраэдра  $q = 1$ , иначе  $q < 1$ . С уменьшением  $q$  тетраэдральная ячейка становится более «неправильной», и, соответственно, «плохой» с точки зрения точности аппроксимации макроскопических уравнений. Распределения на рис. 3

нормированы так, чтобы площадь под каждой кривой равнялась 1. Если сетка содержит большее число «хороших» ячеек (с большим  $q$ ), то ее кривая распределения расположена правее. Видно, что сетки (1) и (2) обладают сходным распределением, в то время как распределения для сеток (3)–(6) почти совпадают. Таким образом, распределение  $q$  мало зависит от заданного характерного размера сетки и от количества ячеек, а определяется алгоритмами TetGen и Gmsh.

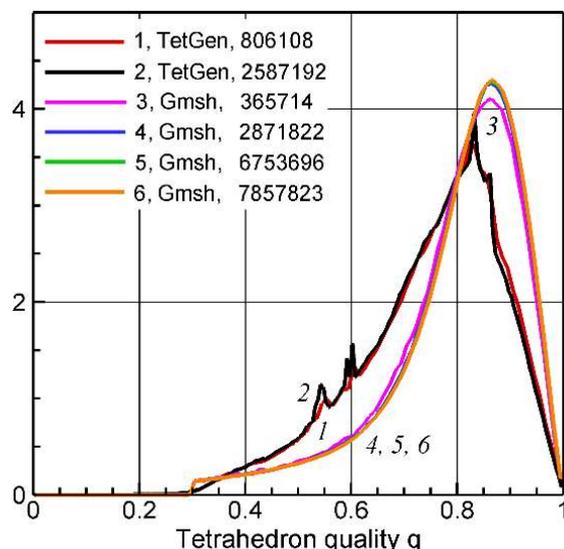


Рис. 3. Распределения критерия качества тетраэдральных ячеек используемых сеток с указанием сеточных генераторов и числа ячеек. Нумерация кривых соответствует табл. 1

Можно выделить три свойства сетки, важных для точности моделирования: характерный размер ячеек на поверхности модели  $hm$  (табл. 1), степень неравномерности (табл. 1 и рис. 2), качество ячеек, определяемое распределением параметра  $q$  (рис. 3). По параметру  $hm$  наилучшей является сетка (2), по степени неравномерности – сетка (6). По качеству ячеек сетки (3)–(6) имеют некоторое преимущество перед (1) и (2). По совокупности параметров наилучшей является сетка (5).

### 3. Алгоритм моделирования

Основой КГД алгоритма является система квазигазодинамических уравнений для идеального политропного газа [13–15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p &= \nabla_i \Pi^{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i &= \nabla_i (\Pi^{ij} u_j) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность;  $u^i$  – компоненты макроскопической скорости;  $p = \rho RT$  – давление;  $T$  – температура;  $E = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$  – полная энергия единицы объема;  $H = (E + p)/\rho$  – полная удельная энтальпия, показатель адиабаты для воздуха составляет  $\gamma = 1.4$ . Выражения для вектора плотности потока массы  $j_m^i$ , тензора вязких напряжений  $\Pi^{ij}$  и теплового потока  $q^i$  записываются как

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = (\tau/\rho)(\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p),$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} &= \Pi_{NS}^{ij} + \tau u^i \rho \left( u_k \nabla^k u^j + \left( \frac{1}{\rho} \right) \nabla_j p \right) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \\ \Pi_{NS}^{ij} &= \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - (2/3) \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \\ q^i &= q_{NS}^i - \tau u^i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j (1/\rho)), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T \end{aligned} \quad (2)$$

При этом  $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$  – внутренняя энергия единицы массы газа;  $\Pi_{NS}^{ij}$  и  $q_{NS}^i$  – тензор вязких напряжений и тепловой поток в системе Навье–Стокса;  $\mu$ ,  $\zeta$  и  $\kappa$  – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости и теплопроводности соответственно.

Коэффициент сдвиговой вязкости  $\mu$  вычисляется через температурную зависимость

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^\omega, \quad (3)$$

где  $\mu_0$  – вязкость газа при температуре набегающего потока  $T_0$ ;  $\omega = 0.74$  – показатель межмолекулярного взаимодействия. Коэффициент теплопроводности вычисляется как  $\kappa = \mu R \gamma / (\text{Pr}(\gamma - 1))$ , где для воздуха число Прандтля  $\text{Pr} = 0.737$ . Коэффициент  $\tau$ , определяющий дополнительную диссипацию в КГД алгоритме, определяется как

$$\tau = \mu / (p \text{Sc}) + \alpha h / c, \quad (4)$$

где первое слагаемое связывается с коэффициентом сдвиговой вязкости и имеет порядок характерного времени между столкновениями частиц газа, второе слагаемое обеспечивает дополнительную искусственную вязкость для обеспечения устойчивости КГД алгоритма при моделировании сверхзвуковых течений плотных газов. Величина искусственной добавки определяется настроечным параметром  $\alpha = 0.5$ , при этом  $h$  – характерный локальный размер пространственной ячейки,  $c$  – локальная скорость звука,  $\text{Sc} = 0.799$  – число Шмидта для воздуха.

Коэффициент объемной вязкости также представляется в виде двух слагаемых, первое из которых является аппроксимационной формулой, а второе вводит дополнительную искусственную вязкость, также для увеличения устойчивости алгоритма в сверхзвуковых областях

$$\zeta = \mu \left( \left( \frac{5}{3} \right) - \gamma \right) + \delta \left( \frac{h}{c} \right) p \quad (5)$$

Величина регулизирующей добавки здесь так же, как в (8), определяется локальными параметрами  $h$ ,  $c$  и настроечным параметром  $\delta = 3$ .

Методика численного моделирования описана в [20]. Газодинамические параметры (плотность, скорость, давление, температура, энергия) приводятся к безразмерному виду. В качестве размерных параметров выбраны характерная длина 1 м, плотность и скорость звука в набегающем потоке. Таким образом, в набегающем потоке  $\rho = 1$ ,  $p = 1/\gamma$ ,  $T = 1$ ,  $U = \text{Ma}$ ,  $\text{Re}_D = \text{Ma} D / \mu_0$ . Уравнение состояния в безразмерных переменных приобретает вид  $p = \rho T / \gamma$ , скорость звука  $c = \sqrt{T}$ .

Значения газодинамических параметров определяются в узлах сетки. Значения газодинамических переменных в точках расчетной области, расположенных между узлами сетки, определяются как среднее арифметическое значений в узлах. Конечно-разностная аппроксимация макроскопических КГД уравнений строится методом контрольных объемов. Барический контрольный объем строится вокруг каждого узла сетки. Поскольку диссипативные коэффициенты зависят от локальных параметров, на тетраэдральной сетке алгоритм имеет первый порядок аппроксимации по пространству.

В начальный момент на входной границе задаются параметры набегающего потока, внутри расчетной области задаются такие же параметры, кроме скорости: газ в начальный момент неподвижен. На входной границе значения набегающего потока поддерживаются постоянными. На выходной границе ставятся условия сноса, позволяющие газу свободно

покидать область. На твердой границе модели ставятся условия прилипания (вектор скорости равен нулю), при этом используется дополнительное граничное условие КГД алгоритма: нормальная производная давления равна нулю. Условия на твердой границе модели считаются адиабатическими. Конфигурация входных и выходных границ различается для сеток TetGen и Gmsh и показана на рис. 1.

Решение начально-краевой задачи для сеточных аналогов системы (1)–(5) находится по явной по времени конечно-разностной схеме, имеющий первый порядок аппроксимации по времени. Шаг по времени вычисляется как  $h_t = \beta h/c$ , где  $\beta = 0.1$  – число Куранта,  $h$  и  $c$  – те же локальные параметры, что в (4)–(5). Расчеты проводились с помощью суперкомпьютера К-100, установленного в Центре коллективного пользования Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН [24]. Использовалось распараллеливание вычислений, основанное на декомпозиции расчетной области с применением стандарта передачи сообщений MPI и библиотеки METIS. В зависимости от варианта расчета, машинное время составляло от 1 часа до нескольких суток при использовании от 64 до 128 процессорных ядер.

#### 4. Сравнение результатов моделирования

На основе описанного алгоритма на сетках (1)–(6) проведено моделирование обтекания стандартной модели НВ-2 вязким теплопроводным газом при  $Ma = 1.5$ ,  $Re_D = 2 \times 10^5$ . Исследовались пространственные распределения газодинамических параметров при значениях безразмерного времени  $t$  от 9 до 25 (число итераций разностной схемы порядка  $10^5 \div 10^6$ ). К моменту  $t = 9$  для всех вариантов формируется физически адекватная картина течения. Расчеты от  $t = 9$  до  $t = 25$  проводились для изучения режима нестационарности.

Для примера на рис. 4 приведены картины обтекания, полученные на сетках (2) и (4) при  $t = 9$ .

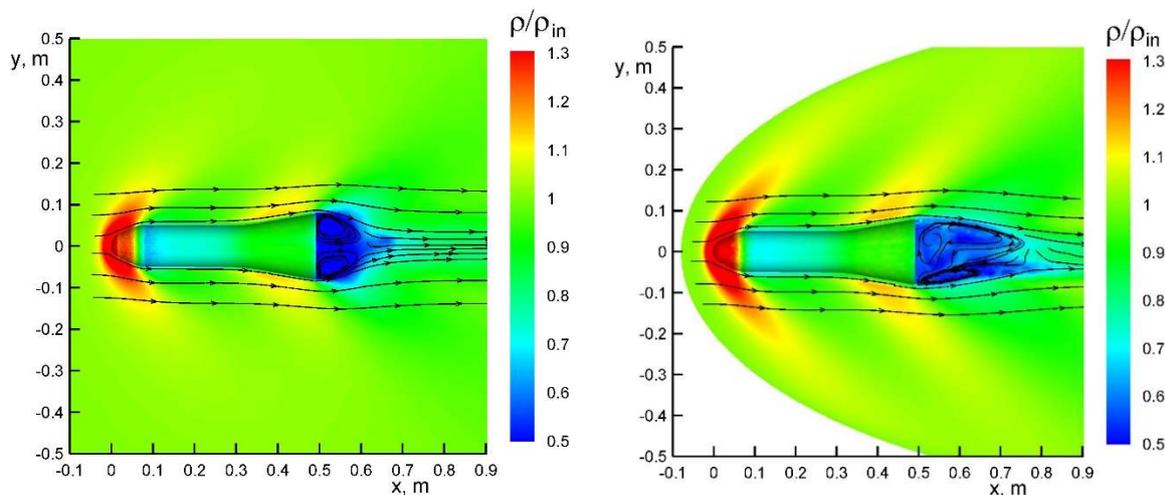


Рис. 4. Уровни нормированной плотности и линии тока при  $z = 0$ , полученные при моделировании на сетках (2) (слева) и (4) (справа)

На сетке (2) обтекание является стационарным с образованием тороидального вихря за донной поверхностью. На сетке (4) течение за донной поверхностью является нестационарным с образованием хаотичной картины вихрей. Скачки уплотнения на удалении от модели на сетке (4) разрешаются лучше.

Для оценки точности моделирования газодинамического обтекания рассмотрим следующие критерии:

- соответствие полученных параметров торможения на носовой части модели теоретическим данным, вычисленными на основе условий Гюгонио и изэнтропических формул [14];

- возможность получения нестационарной картины обтекания;
- соответствие полученных путем интегрирования распределения давления по поверхности модели аэродинамических коэффициентов полного и носового сопротивления экспериментальным значениям;
- соответствие полученных поверхностных профилей давления в осевом сечении экспериментальным данным;
- сходимость результатов при измельчении сетки;
- разрешение скачков уплотнения на удалении от модели.

Оценим влияние параметров сеток (см. табл. 1) на точность моделирования согласно указанным критериям.

На рис. 5 (слева) сравниваются полученные безразмерные значения торможения с теоретическими данными. Видно, что минимум отклонения от теории достигается на сетке (5), наилучшей по совокупности параметров. Сравнение результатов (1) и (2) показывает сходимость результатов при измельчении сеток TetGen, но даже на сетке (2) удовлетворительного согласия с теорией не достигается. Сравнение результатов (3), (4) и (5) показывает сходимость при измельчении сеток Gmsh. На сетке с большим  $hm$  (3) удовлетворительного согласия нет. Также нет согласия на близкой к равномерной по всей расчетной области сетке (6), но с большим  $hm$ .

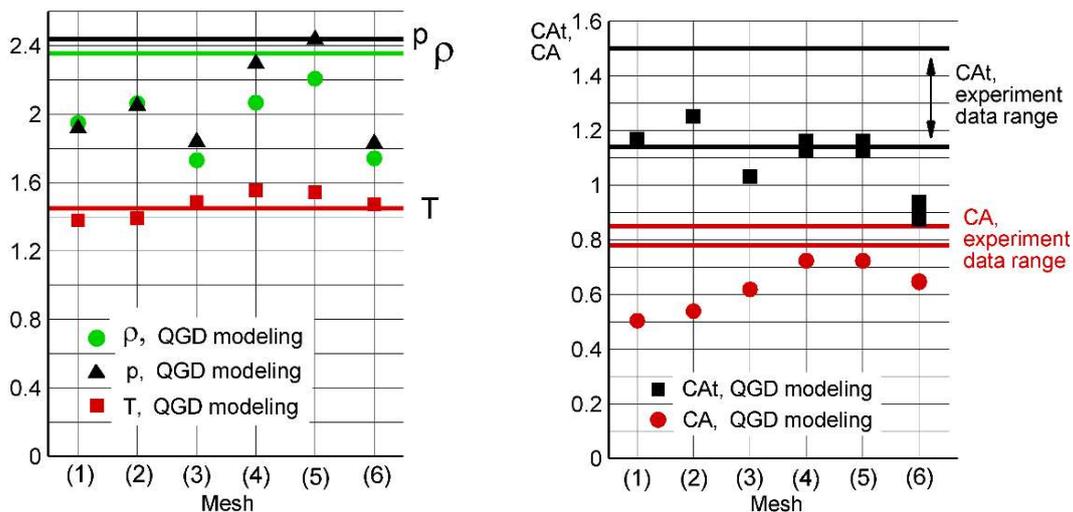


Рис. 5. Значения безразмерных параметров торможения, моделирование и теория (слева); значения аэродинамических коэффициентов, моделирование и эксперимент (справа)

Нестационарный режим с образованием хаотичных вихрей за донной областью модели оказалось возможным получить только на сетках (4), (5), (6). Видимо, наличие слишком больших ячеек в сетках (1), (2), (3) увеличивает эффективную вязкость алгоритма моделирования, что препятствует получению нестационарного решения. Влияние нестационарности на значения параметров в точке торможения незначительно и не отражено на рис. 5.

На рис. 5 (справа) приведено сравнение полученных аэродинамических коэффициентов полного  $CA_t$  и носового  $CA$  сопротивления ( $CA_t = CA + CA_b$ , где  $CA_b$  – донное сопротивление) с экспериментальными значениями [9–11]. Поскольку авторы экспериментальных исследований приводят несколько различные данные измерений (это обусловлено, в частности, сложностью измерения  $CA_b$  при влиянии державки), на рис. 5 приведены диапазоны известных экспериментальных значений (между горизонтальными прямыми). Удовлетворительное согласие с экспериментом достигается на сетках (4) и (5). На сетках (1) и (2) достигается хорошее согласие коэффициента полного сопротивления  $CA_t$ , но значения  $CA$  не соответствуют эксперименту. При измельчении сетки Gmsh (сравнение (3) и (4)–(5)) результаты становятся ближе к эксперименту. На близкой к равномерной, но грубой сетке (6) соответствия

эксперименту нет. Поскольку на сетках (4), (5), (6) режим обтекания нестационарный, соответствующие маркеры вытянуты в вертикальном направлении, что отражает небольшие вариации  $CA_t$  с течением времени. При этом вариации  $CA$  малы и не отражены на рис. 7.

Отметим, что в большинстве экспериментальных работ при исследовании модели НВ-2 в аэродинамических трубах число Рейнольдса  $Re_D$  при  $Ma = 1.5$  имеет порядок величины  $1.5 \times 10^6$ , в то время как в настоящей работе для повышения устойчивости расчетов  $Re_D = 2 \times 10^5$ . Однако в [9] приводятся данные, показывающие, что в экспериментах влияние числа Рейнольдса в диапазоне от  $2 \times 10^5$  до  $1.4 \times 10^6$  на значения аэродинамических коэффициентов незначительно при умеренных числах Маха ( $Ma < 4$ ). Кроме того, на сетке (4) был проведен расчет при  $Re_D = 1.4 \times 10^6$ , что в точности соответствует условиям [9]. Различий с вариантом  $Re_D = 2 \times 10^5$  практически нет. Таким образом, сравнение результатов моделирования при  $Re_D = 2 \times 10^5$  с экспериментальными данными при больших  $Re_D$  оправдано.

На рис. 6 показаны поверхностные профили давления в сечении  $z = 0$ , полученные при моделировании на построенных сетках, а также соответствующие экспериментальные данные из [9]. Давление нормировано на теоретическое давление торможения на носовой части модели. В целом наилучшее согласие с экспериментом наблюдается на сетке (5), несколько хуже результаты на сетке (4). Однако на этих сетках значения давления завышены в локальных минимумах, а также не разрешается ступенчатый характер профиля при  $0.05 < x/L_{NB-2} < 0.1$ . На сетках (1) и (2) ступенчатый участок отчасти разрешается, и есть совпадение с экспериментом в локальных минимумах, но значения давления в локальных максимумах заметно меньше экспериментальных. Наблюдается сходимость результатов к эксперименту при измельчении сеток TetGen (сравнение (1) и (2)) и Gmsh (сравнение (4) и (5)). На грубых на поверхности модели сетках (3) и (6) профили дальше от эксперимента, чем на более подробных (1), (2), (4) и (6).

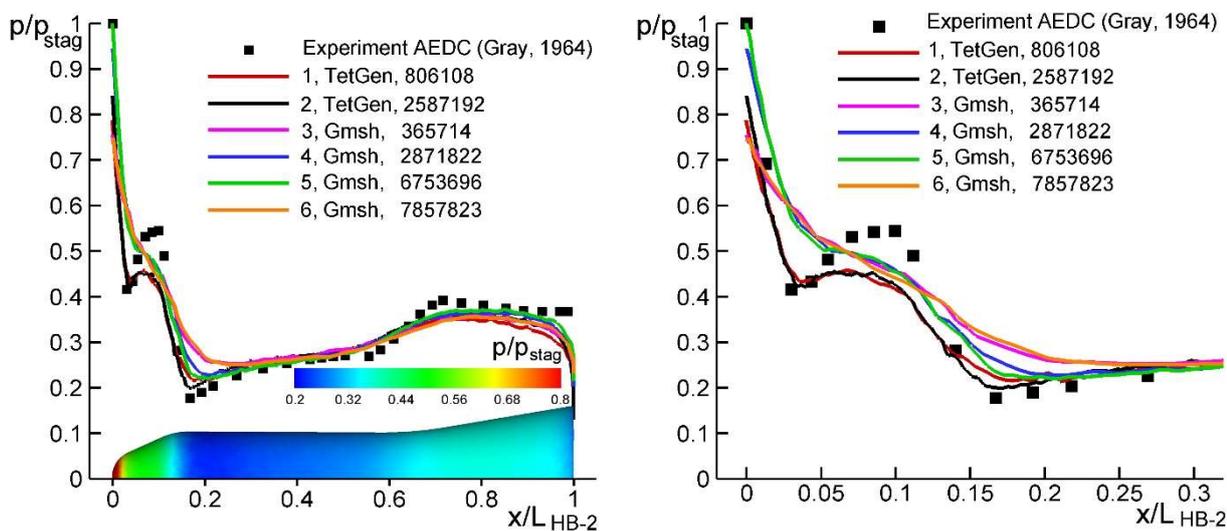


Рис. 6. Поверхностные профили давления в сечении  $z = 0$ : эксперимент и моделирование на разных сетках (слева вдоль всей модели, справа носовой фрагмент в увеличении). Приведенные уровни давления на поверхности модели соответствуют сетке (5). Обозначения кривых соответствуют рис. 2 и 3

Разрешение скачков уплотнения на удалении от модели зависит от размера ячеек в этой области, и лучше всего происходит на сетке (5). На рис. 7 приведены уровни плотности, линии тока, уровни давления, температуры и числа Маха и линии тока при моделировании на сетке (5).

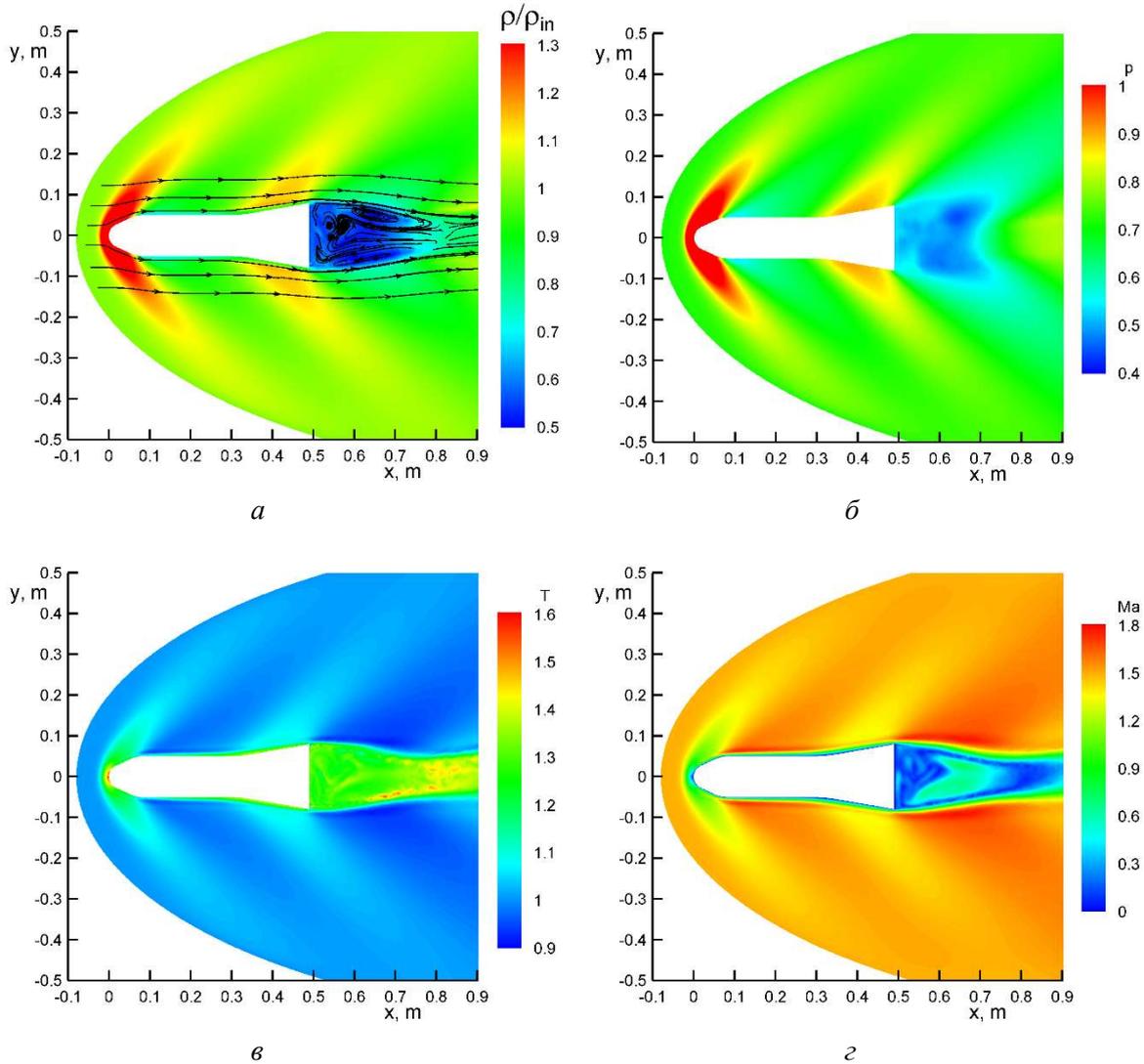


Рис. 7. Уровни плотности, линии тока (а); уровни давления (б); температуры (в) и числа Маха (г) при моделировании на сетке (5)

## 5. Выводы

При использовании сетки (5), наилучшей по совокупности параметров (характерный размер ячеек на поверхности модели, степень неравномерности, качество ячеек) получаются в целом наилучшие по рассмотренным критериям результаты, а именно: согласие параметров торможения с теоретическими значениями, согласие аэродинамических коэффициентов и поверхностных профилей давления с экспериментом, возможность моделирования нестационарного течения за донной областью модели, разрешение скачков уплотнения.

При уменьшении шага сетки на поверхности ценой увеличения степени неравномерности и увеличения размера ячеек на удалении от модели, а также некоторого ухудшения качества ячеек (сетки (1) и (2)) результаты в целом становятся хуже, и нет возможности моделировать нестационарный режим.

При увеличении степени равномерности сетки ценой увеличения шага (сетка (6)) результаты также становятся хуже, чем на сетках (4) и (5), хотя нестационарный режим возникает. Таким образом, использование почти равномерной сетки с большим числом ячеек нецелесообразно при слишком большом шаге на поверхности модели. Можно приблизительно оценить шаг на поверхности модели  $hm$ , который имеет смысл выбирать для возможности получения адекватных результатов моделирования:  $hm < 4$  мм при диаметре цилиндрической части модели  $D = 100$  мм.

При сравнении результатов, полученных на сетках (1) и (2), а также (3), (4), (5) видно, что в большинстве случаев результаты улучшаются при измельчении сетки при сохранении остальных параметров, т. е. имеет место сеточная сходимость.

Отметим, что даже на сетке (3) с очень малым для задач моделирования сверхзвукового обтекания числом ячеек, но сбалансированной по параметрам, возможно получить приблизительно верную картину обтекания, но без точного совпадения с экспериментом и без возможности моделирования нестационарного режима. Расчет на сетке (3) занимает около часа машинного времени, что может быть полезным в случае необходимости быстрого получения приблизительных результатов.

## Благодарности и ссылки на гранты

Авторы благодарны А. Г. Чурбанову за консультации по использованию пакета Gmsh.

## Литература

1. Watson D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes // *The Computer Journal*. 1981. Vol. 24(2). Pp. 167–172.  
<https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.167>
2. Bowyer A. Computing Dirichlet tessellations // *The Computer Journal*. 1981. Vol. 24(2). Pp. 162–166.  
<https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.162>
3. George P.-L., Frey P.J. *Mesh generation*. Hermes, Lyon, 2000. 850 p.
4. Rebay S. Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm // *J. Comput. Phys.* 1993. Vol. 106. Pp. 25–138.
5. Суков С.А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2015. № 23. 22 с.
6. Поляков С.В., Чурбанов А.Г. Свободное программное обеспечение для математического моделирования // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2019. № 145. 32 с.
7. Ермаков М.К., Крючкова А.С. Генерация неструктурированных тетраэдральных сеток для обтекания летательных аппаратов на основе открытых пакетов // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2020. Т. 21, вып. 2.  
<https://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-2/articles/897/>
8. Широков И.А., Елизарова Т.Г. О влиянии структуры пространственной сетки на результаты численного моделирования ударной волны в задаче обтекания трехмерной модели // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2019. Т. 20, вып. 1.  
<http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-1/articles/796/>
9. Gray J.D. *Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2*. AEDC-TDR-64-137. 1964.
10. Ceresuela R. *Maquettes etalons HB-1 et HB-2. Caracteristiques aerodynamiques mesurees dans les souffleries de l'O.N.E.R.A. de Mach 2 a Mach 16.5* // *Note Technique O.N.E.R.A.* 1968. №123. 24 p.
11. Vukovic Dj., Damjanovic D. HB-2 high-velocity correlation model at high angles of attack in supersonic wind tunnel tests // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2019. Vol. 32(7). Pp. 1565–1576.
12. Крючкова А.С. Моделирование сверхзвукового обтекания баллистических моделей в программном коде UST3D // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2018. Т. 19, вып. 4.  
<https://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-4/articles/783/>
13. Chetverushkin B.N. *Kinetic schemes and quasi-gas dynamic system of equations*. Barselona: CIMNE, 2008. 298 p.
14. Elizarova T.G. *Quasi-gas dynamic equations*. Dordrecht: Springer, 2009. 300 p.
15. Шеретов Ю.В. *Регуляризованные уравнения гидродинамики*. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2016. 222 с.

16. Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.C., Chpoun A. Rarefied gas flow simulation based on quasi gas dynamic equations // *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33. No. 12. Pp. 2316–2324.
17. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.
18. Shirokov I.A., Elizarova T.G. Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow bas-ing on quasi-gas dynamic equations // *J. of Turbulence*. 2014. Vol. 15, iss 10. Pp. 707–730.
19. Елизарова Т.Г., Широков И. А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // *Докл. Акад. Наук*. 2018. Т. 483, № 3. С. 260–264.
20. Широков И.А. Численное исследование аэродинамических характеристик треугольного крыла при различных углах атаки и больших числах Маха. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. № 56. 24 с.
21. TetGen: A quality tetrahedral mesh generator. <http://tetgen.berlios.de>
22. Gmsh: three-dimensional finite element mesh generator. <https://gmsh.info>
23. Широков И. А. Алгоритм построения сетки на основе tetgen для моделирования внешнего обтекания осесимметричной модели // *Математическое моделирование*. 2021. Т. 33, № 5. С. 91–106.
24. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow. <https://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.html>

## References

1. Watson D. F., Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, *The Computer Journal*, 1981, vol. 24, no. 2, pp. 167–172. <https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.167>
2. Bowyer A., Computing Dirichlet tessellations, *The Computer Journal*, 1981, vol. 24, no 2, pp. 162–166. <https://doi.org/10.1093/comjnl/24.2.162>
3. George P.-L., Frey P. J., *Mesh generation*, Hermes, Lyon, 2000, 850 p.
4. Rebay S., Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm, *J. Comput. Phys*, 1993, vol. 106, pp. 25–138., <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1097>
5. Sukov S. A., *Tetrahedral mesh generation algorithms and applications*, М.: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Preprint No. 23, 2015, 22 p. [in Russian]. Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-23>
6. Poliakov S. V., Churbanov A. G., *Free and open source software for mathematical modeling*, М.: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Preprint No.145, 2019, 32 p. [in Russian]. Available at <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-145>
7. Ermakov M. K., Kriuchkova A. S., Generation of unstructured tetrahedral meshes for flow past flight vehicles based on open packages, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamic*, 2020, vol. 21, no. 2 [in Russian]. <https://doi.org/10.33257/PhChGD.21.2.897>
8. Shirokov I. A., Elizarova T. G., On the influence of a spatial mesh structure on the results of numerical simulation of a shock wave in a flow around a 3D model, *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, suppl. 1, no 9, pp. S1–S12. <https://doi.org/10.1134/S0015462822601474>
9. Gray J. D., *Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2*, AEDC-TDR-64-137, 1964.
10. Ceresuela R., *Maquettes etalons HB-1 et HB-2. Caracteristiques aerodynamiques mesurees dans les souffleries de l'O.N.E.R.A. de Mach 2 a Mach 16.5*, Note Technique O.N.E.R.A., 1968, no. 123. 24 p.
11. Vukovic Dj., Damljanovic D., HB-2 high-velocity correlation model at high angles of attack in supersonic wind tunnel tests, *Chinese Journal of Aeronautics*, 2019, vol. 32, no. 7, pp. 1565–1576. <https://doi.org/10.1016/J.CJA.2019.03.022>

12. Kryuchkova A. S., Numerical simulation of supersonic flows over ballistic models using UST3D programming code, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamic*, 2018, vol. 19, no. 4 [in Russian]. <https://doi.org/10.33257/PhChGD.19.4.783>
13. Chetverushkin B. N., *Kinetic schemes and quasi-gas dynamic system of equations*, Barselona: CIMNE, 2008, 298 p.
14. Elizarova T. G., *Quasi-gas dynamic equations*, Dordrecht: Springer, 2009, 300 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00292-2>
15. Sheretov Yu. V., *Regularized Hydrodynamic Equations*, Tver State University, 2016, 222 p.
16. Elizarova T. G., Graur I. A., Lengrand J. C., Chpoun A., Rarefied gas flow simulation based on quasi gas dynamic equations, *AIAA Journal*, 1995, vol. 33, no. 12, pp. 2316–2324. <https://doi.org/10.2514/3.12986>
17. Elizarova T. G., Shirokov I. A., *Regularized equations and examples of their use in the modeling of gas-dynamic flows*, Moscow, MAKS Press, 2017, 136 p. [in Russian].
18. Shirokov I. A., Elizarova T. G., Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow bas-ing on quasi-gas dynamic equations, *J. of Turbulence*, 2014, vol. 15, no. 10, pp. 707–730. <https://doi.org/10.1080/14685248.2014.927581>
19. Elizarova T. G., Shirokov I. A., Artificial dissipation coefficients in regularized equations of supersonic aerodynamics, *Doklady Mathematics*, 2018, vol. 98, no. 3. pp. 648–651. <https://doi.org/10.1134/S1064562418070141>
20. Shirokov I. A., *Numerical study of the aerodynamic characteristics of a triangular wing at different angles of attack and large Mach numbers*, M.: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Preprint No. 56, 2021, 24 p. [in Russian]. Available at <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-56>
21. TetGen: A quality tetrahedral mesh generator. Available at <http://tetgen.berlios.de>
22. Gmsh: three-dimensional finite element mesh generator. Available at <https://gmsh.info>
23. Shirokov I. A, Mesh construction algorithm based on TetGen for modeling the external flow around an axisymmetric model, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 13, no. 6, pp. 1148–1159. DOI:10.1134/S2070048221060211
24. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow. Available at <https://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.html>

Статья поступила в редакцию 24 января 2025 г.